

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



GRAU MÍNIMO DE IDENTIDADES STANDARD DE  
ÁLGBRAS DE MATRIZES COM INVOLUÇÃO  
GRADUADA

DAFNE CAMPOS LIMA BESSADES

BELO HORIZONTE - MG  
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

GRAU MÍNIMO DE IDENTIDADES STANDARD DE ÁLGEBRAS DE  
MATRIZES COM INVOLUÇÃO GRADUADA

Tese de Doutorado submetida ao  
Programa de Pós-Graduação em  
Matemática como parte dos requi-  
sitos exigidos para a obtenção do  
título de Doutora em Matemática.

**DAFNE CAMPOS LIMA BESSADES**  
**ORIENTADORA: ANA CRISTINA VIEIRA**  
**COORIENTADOR: RAFAEL BEZERRA DOS SANTOS**

BELO HORIZONTE - MG  
2021

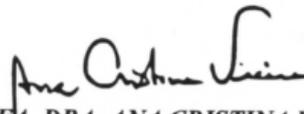
© 2021, Dafne Campos Lima Bessades.  
Todos os direitos reservados

	Bessades, Dafne Campos Lima.
B557g	Grau mínimo de identidades standard de álgebras de $n$ matrizes com involução graduada [manuscrito] / Dafne Campos Lima Bessades – 2021. x, 88 f. il.  Orientadora: Ana Cristina Vieira. Orientador: Rafael Bezerra dos Santos. Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. Referências: f.85-88.  1. Matemática – Teses. 2. Superálgebras – Teses. 3. Involução graduada – Teses. 4. Identidades (Matemática) – Teses. 5. Isomorfismos (Matemática). I. Vieira, Ana Cristina. II. Santos, Rafael Bezerra dos. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV. Título.
	CDU 51 (043)

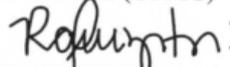
Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa  
CRB 6ª Região nº 1510

ATA DA CENTÉSIMA SEXAGÉSIMA TERCEIRA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DA ALUNA DAFNE CAMPOS LIMA BESSADES, REGULARMENTE MATRICULADA NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA DIA 28 DE ABRIL DE 2021.

Aos vinte e oito dias do mês de abril de 2021, às 10h00, em reunião pública virtual na Plataforma Google Meet pelo link <https://meet.google.com/tij-cmjx-bvj> (conforme mensagem eletrônica da Pró-Reitoria de Pós-Graduação de 26/03/2020, com orientações para a atividade de defesa de tese durante a vigência da Portaria nº 1819), reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para julgar a defesa de tese da aluna **Dafne Campos Lima Bessades**, intitulada: “*Grau mínimo de identidades standard de álgebras de matrizes com involução graduada*”, requisito final para obtenção do Grau de Doutora em Matemática. Abrindo a sessão, a Senhora Presidente da Comissão, Profa. Ana Cristina Vieira, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra à aluna para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa da aluna. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se reservadamente, sem a presença da aluna, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: a aluna foi considerada aprovada sem ressalvas e por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente à aluna pela Senhora Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, a Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 28 de abril de 2021.



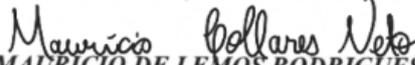
**PROFA. DRA. ANA CRISTINA VIEIRA**  
Orientadora (UFMG)



**PROF. DR. RAFAEL BEZERRA DOS SANTOS**  
Coorientador (UFMG)



**PROF. DR. ANTONIO GIAMBRUNO**  
Examinador (Universidade de Palermo)



**PROF. DR. MAURÍCIO DE LEMOS RODRIGUES COLLARES NETO**  
Examinador (UFMG)



**PROF. DR. PLAMEN KOSHLUKOV**  
Examinador (Unicamp)



**PROF. DR. WALDECK SCHÜTZER**  
Examinador (UFSCar)

*Aos meus pais Marco e Rosângela, para vocês com muito carinho.*

*Ao leitor interessado, este texto contém desenhos com significados incríveis!*

# Agradecimentos

Acredito que para toda pessoa que tem dentro de si o amor e a admiração pelo ato de conhecer, a conquista do título de doutor não é apenas um evento isolado na vida, mas o agente propulsor de parte dela. Gostaria de agradecer às pessoas que de algum modo colaboraram para que eu tivesse a oportunidade de iniciar a realização desse sonho.

Aos meus pais Marco Antônio e Rosângela por toda a educação, dedicação, carinho e amor a mim dedicados ao longo de toda a minha vida, tenho muito orgulho e amo muito vocês. À minha irmã Débora, ao meu cunhado Matheus e à minha doce e encantadora sobrinha Samira por todos os momentos de amor e felicidade compartilhados.

Aos meus avôs Manuel e Brandão (*in memoriam*), a quem o tempo só faz aumentar a saudade, muito obrigada por cada conselho dado. Às minhas avós Rita e Ruth por serem exemplos de força e dedicação. Muito obrigada por tudo vovó Rita.

Gostaria de agradecer com muito carinho a toda a minha família, da qual venho sentindo muita saudade nesses tempos de pandemia: tios, tias e primos, vocês são e sempre serão um suspiro de amor e leveza em minha vida.

Ao meu marido Edno Alan, por todo apoio, carinho, paciência e cumplicidade durante todos esses anos de amor e parceria. Serei eternamente grata por sua amorosa presença durante esse período. À família do meu marido por todo o incentivo e carinho. Em especial, aos meus cunhados Ediane, Jéssica e Jerlis por todos os momentos de descontração que tanto me alegraram durante todo esse período.

Aos meus queridos amigos do departamento de Matemática da UFMG pelos bons momentos. Aos amigos pertencentes ao grupo de PI-álgebras: Mallu, Maralice, Willer, Lorena, Juan e Marcos por todos os momentos de alegria, todos os seminários e todo conhecimento compartilhado. Em especial, não posso deixar de agradecer à Mallu e à Maralice por serem amigas não apenas de trabalho e estudo, mas por fazerem parte da minha vida pessoal, tenho muito zelo e carinho por vocês duas.

À minha orientadora Ana Cristina Vieira, nunca vou conseguir agradecer suficientemente a sua dedicação e atenção durante esses anos de convivência. Obrigada por sempre me incentivar a estudar e pesquisar matemática, ser a minha referência como profissional e por diversas vezes clarear a minha mente sobre questões da vida.

Ao meu coorientador Rafael Bezerra dos Santos, por toda a dedicação e carinho comigo ao longo desse período. Fui muito privilegiada pela sua parceria com a Ana.

Ao professor Maurício Collares, pela partilha do conhecimento e pela colaboração em parte desse trabalho.

Aos professores da banca: Antonio Giambruno, Maurício Collares, Plamen Koshlukov e Waldeck Schützer pelas preciosas sugestões e importantes comentários.

À todos os professores e funcionários do Departamento de Matemática da UFMG que contribuíram de algum modo para a minha formação. Muito Obrigada!

À UFMG e todos os seus membros, pela oportunidade e acolhimento.

Finalmente, à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

*“...In this world there is room for everyone. And the good earth is rich and can provide for everyone. The way of life can be free and beautiful, but we have lost the way. Greed has poisoned men’s souls, has barricaded the world with hate, has goose-stepped us into misery and bloodshed. We have developed speed, but we have shut ourselves in. Machinery that gives abundance has left us in want. Our knowledge has made us cynical. Our cleverness, hard and unkind. We think too much and feel too little. More than machinery we need humanity. More than cleverness we need kindness and gentleness. Without these qualities, life will be violent and all will be lost...*

*...Let us fight for a new world - a decent world that will give men a chance to work - that will give youth a future and old age a security...*

*...Let us fight to free the world - to do away with national barriers - to do away with greed, with hate and intolerance. Let us fight for a world of reason, a world where science and progress will lead to all men’s happiness...”*

(Final speech from *The Great Dictator*, Charlie Chaplin)

# Resumo

Seja  $F$  um corpo de característica zero. Uma superálgebra associativa  $A = A_0 \oplus A_1$  munida de uma involução  $*$  é dita uma  $*$ -superálgebra se  $A_0^* = A_0$  e  $A_1^* = A_1$ . Nesse caso, também dizemos que a involução  $*$  é uma involução graduada em  $A$ . Em [19] os autores provaram que para  $F$  um corpo algebricamente fechado, as únicas involuções graduadas que podem ser definidas, a menos de isomorfismo, nas superálgebras de matrizes  $M_{k,l}(F)$  são a involução transposta ( $t$ ) e a involução simplética ( $s$ ), onde a involução simplética ocorre somente quando  $k = l$  e  $l \neq 0$  ou quando  $l = 0$  e  $k$  é par.

Nesta tese estamos interessados no estudo da minimalidade do grau de identidades standard das superálgebras de matrizes  $M_{k,l}(F)$  munidas de involuções graduadas. Mais especificamente, fornecemos o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard cujas variáveis são pares, simétricas ou antissimétricas, de  $(M_{k,l}(F), t)$  e estabelecemos cotas superiores e inferiores para o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard cujas variáveis são ímpares, simétricas ou antissimétricas, de  $(M_{k,l}(F), t)$ . Além disso, determinamos o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard cujas variáveis são pares, simétricas ou antissimétricas, de  $(M_{k,k}(F), s)$  e fornecemos o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard cujas variáveis são ímpares e antissimétricas de  $(M_{k,k}(F), s)$ .

**Palavras chaves:**  $*$ -superálgebras de matrizes, involução graduada transposta, involução graduada simplética, identidades standard, grau mínimo, grafos canceladores.

# Abstract

Let  $F$  be a field of characteristic zero. An associative superalgebra  $A = A_0 \oplus A_1$  endowed with an involution  $*$  is a  $*$ -superalgebra if  $A_0^* = A_0$  and  $A_1^* = A_1$ . In this case, we also say that  $*$  is a graded involution on  $A$ . In [19] the authors proved that for an algebraically closed field  $F$ , the only graded involutions that can be defined, up to isomorphism, on the matrix superalgebras  $M_{k,l}(F)$  are the transpose involution ( $t$ ) and the symplectic involution ( $s$ ), where the symplectic involution occurs only when  $k = l$  and  $l \neq 0$  or when  $l = 0$  and  $k$  is even.

In this thesis we are interested in the study of the minimality of the degree of standard identities of matrix superalgebras  $M_{k,l}(F)$  endowed with graded involutions. More specifically, we provide the smallest degree of a standard  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identity in symmetric and also in skew variables of even degree of the  $*$ -superalgebra  $(M_{k,l}(F), t)$  and establish upper and lower bounds for the minimal degree of a standard  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identity in symmetric and also in skew variables of odd degree of  $(M_{k,l}(F), t)$ . In addition, we determine the smallest degree of a standard  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identity in symmetric and also in skew variables of even degree of the  $*$ -superalgebra  $(M_{k,k}(F), s)$  and we provide the smallest degree of a standard  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identity in skew variables of odd degree of  $(M_{k,k}(F), s)$ .

**Keywords:**  $*$ -superalgebras of matrices, transpose graded involution, symplectic graded involution, standard identities, minimal degree, cancelling graphs.

# Lista de Figuras

2.1	Grafo diamante. . . . .	23
2.2	Grafo associado a substituição $S_r^{(l,k,i,j)}$ , onde $l = i, k = j; r = 4, s \neq i, s \neq j$ . . . . .	27
2.3	Grafo associado a substituição $S_r^{(l,k,i,j)}$ , onde $l = i; k \neq i; k \neq j$ e $r = 4$ . . . . .	27
2.4	Grafo com troca de rotulação associado a uma substituição $S_r^{(l,k,i,j)}$ . . . . .	27
2.5	Grafo associado a substituição $S_r^{(l,k,i,j)}$ , onde $k = i; l \neq i; l \neq j$ e $r = 4$ . . . . .	28
2.6	Grafo $G(S_{(k,l)})$ . . . . .	30
2.7	Grafo $H(S'_{(k,l)})$ . . . . .	33
2.8	Grafo $H'(S'_{(k,l)})$ . . . . .	35
2.9	Grafo invertido. . . . .	35
3.1	Grafo associado a substituição $S$ no polinômio duplo de Capelli. . . . .	47
3.2	Grafo $\Delta_t$ . . . . .	47
3.3	Grafo $\Delta_2$ . . . . .	48
3.4	Grafo $\Delta_{t-1}$ . . . . .	48
3.5	Grafo $\bar{\Delta}$ . . . . .	48
A.1	Exemplo de grafo. . . . .	62
A.2	Exemplo de pseudografo. . . . .	63
A.3	Grafo com caminho euleriano. . . . .	64
A.4	Grafo atravessável. . . . .	64
A.5	Exemplo de grafo não euleriano e não atravessável. . . . .	64
A.6	Exemplo de grafo cancelador. . . . .	66
A.7	Exemplo de grafo atravessável e cancelador. . . . .	66
A.8	Grafos isomorfos. . . . .	67
A.9	Grafo direcionado. . . . .	69
A.10	Exemplo de grafo direcionado cancelador. . . . .	70
A.11	Grafo direcionado. . . . .	72
B.1	Grafo $H(S'_{(k,l)})$ . . . . .	73

# Sumário

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>6</b>
1.1	PI-álgebras e álgebras com involução . . . . .	6
1.2	Álgebras com involução graduada . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Involução graduada transposta</b>	<b>15</b>
2.1	Variáveis pares simétricas ou antissimétricas . . . . .	15
2.2	Variáveis ímpares simétricas ou antissimétricas . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Involução graduada simplética</b>	<b>38</b>
3.1	Variáveis pares simétricas ou antissimétricas . . . . .	38
3.2	Variáveis ímpares simétricas ou antissimétricas . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>53</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>58</b>
<b>A</b>	<b>Teoria de grafos</b>	<b>62</b>
A.1	Grafos eulerianos . . . . .	62
A.2	Grafos canceladores . . . . .	65
A.3	Grafos canceladores e identidades standard . . . . .	69
<b>B</b>	<b>Demonstração do Teorema 2.15</b>	<b>73</b>

# Introdução

Seja  $A$  uma álgebra associativa sobre um corpo  $F$  de característica zero. Denotaremos por  $F\langle X \rangle$  a álgebra livre associativa livremente gerada por um conjunto  $X$  de variáveis. Na teoria das álgebras associativas é comum e imediato nos perguntarmos se uma álgebra  $A$  é comutativa, se tem dimensão finita, se é nilpotente, entre outras diversas questões que podem ser abordadas com relação à sua estrutura. Uma das razões para essas observações serem realizadas é a tentativa de identificarmos essas álgebras em classes, para posteriormente estudarmos intrinsecamente cada uma delas. Nesse sentido, devido as suas boas características algébricas, existe um grande interesse na classe das álgebras de dimensão finita. Essa classe foi profundamente estudada e esses estudos culminaram em importantes teorias, como por exemplo, a teoria de representações de álgebras de dimensão finita. Além disso, a classe das álgebras de dimensão finita também desempenham um papel fundamental na teoria das álgebras com identidades polinomiais.

Uma identidade polinomial de uma álgebra  $A$  é um polinômio  $f(x_1, \dots, x_n)$  na álgebra livre  $F\langle X \rangle$  que se anula sob quaisquer substituições de elementos da álgebra  $A$ . Uma álgebra  $A$  é denominada uma PI-álgebra se ela satisfaz, pelo menos, uma identidade polinomial não nula.

O polinômio standard de grau  $n$  é definido como sendo o polinômio

$$St_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)},$$

onde  $S_n$  denota o grupo simétrico de grau  $n$  e  $\text{sgn}(\sigma)$  o sinal da permutação  $\sigma$ . Nitidamente, as álgebras de dimensão finita satisfazem o polinômio standard com grau maior que a dimensão da álgebra considerada. Desse modo, a classe das PI-álgebras contém a classe das álgebras de dimensão finita.

Entre as álgebras de dimensão finita, é conhecido que a álgebra de matrizes  $M_n(F)$  desempenha um papel importante e o seu estudo no ponto de vista da PI-teoria é ainda mais relevante, vide as abordagens fornecidas para o estudo de suas identidades polinomiais que costumam ser bastante produtivas para a área. Contudo, a descrição completa dessas identidades não é uma tarefa simples e até o momento apenas o caso

---

$n = 2$  foi completamente compreendido, isto é, existe uma descrição completa das identidades polinomiais satisfeitas por  $M_2(F)$  (ver [13], [37]), mas não temos uma descrição completa para as identidades polinomiais satisfeitas por  $M_n(F)$ , para  $n \geq 3$ .

Desse modo, um estudo mais cuidadoso e detalhado das já conhecidas identidades polinomiais de  $M_n(F)$  torna-se necessário. Entre essas relevantes identidades polinomiais temos o polinômio standard que, como vimos acima, com grau  $n^2 + 1$  é uma identidade polinomial de  $M_n(F)$ . Mais que isso, em 1950 Amitsur e Levitzki demonstraram o seguinte teorema.

**Teorema 0.1.** (Amitsur e Levitzki, [2]) *O polinômio standard de grau  $2n$*

$$St_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(2n)}$$

*é uma identidade polinomial da álgebra de matrizes  $M_n(F)$ . Além disso, não existe uma identidade polinomial de  $M_n(F)$  com grau menor que  $2n$ .*

Em particular, quando apenas polinômios standard são considerados o Teorema de Amitsur e Levitzki estabelece que  $2n$  é o grau mínimo de identidades standard de  $M_n(F)$ . Entre as diversas questões que surgem inspiradas no Teorema de Amitsur e Levitzki, a minimalidade do grau de identidades standard para a álgebra de matrizes em outros contextos despertou um grande interesse de pesquisadores de várias áreas da álgebra. No caso das álgebras de matrizes munidas de uma involução, o problema da minimalidade do grau de identidades standard foi abordado pela primeira vez, em 1958, por Kostant.

É notório que, quando  $F$  é um corpo algebricamente fechado, a involução transposta ( $t$ ) e a involução simplética ( $s$ ) são, a menos de equivalência, as únicas involuções em  $M_n(F)$  (veja, [42, Teorema 3.1.61]), sendo que a involução simplética está definida somente para matrizes de ordem par.

O teorema de Kostant que enunciamos a seguir nos diz que quando apenas substituições de matrizes antissimétricas (com relação a involução transposta) de  $M_n(F)$  são consideradas, essas substituições sempre se anulam quando o grau do polinômio standard for maior ou igual a  $2n - 2$ , no caso em que  $n$  é par.

**Teorema 0.2.** (Kostant, [30]) *O  $*$ -polinômio  $St_{2n-2}(z_1, \dots, z_{2n-2})$  é uma  $*$ -identidade standard em variáveis antissimétricas de  $(M_n(F), t)$ , para todo  $n \geq 2$  par.*

Posteriormente, usando teoria de grafos, Rowen [41] estendeu o teorema de Kostant para todo  $n$  e estabeleceu a minimalidade do grau através do seguinte teorema.

**Teorema 0.3.** (Rowen, [41]) *O  $*$ -polinômio  $St_{2n-2}(z_1, \dots, z_{2n-2})$  é uma  $*$ -identidade standard em variáveis antissimétricas de grau mínimo de  $(M_n(F), t)$ , para todo  $n \geq 2$ .*

---

No mesmo ano em que Rowen apresentou a sua demonstração para as questões relacionadas ao teorema de Kostant, outros dois matemáticos, a saber Owens e Hutchinson, apresentaram demonstrações diferentes para essas questões (ver [27] e [35]). Apesar de coincidentemente Hutchinson, Owens e Rowen terem usado ferramentas provenientes da teoria de grafos em suas demonstrações, as abordagens fornecidas por cada um deles para as questões diferem-se consideravelmente.

Em 1976, Slin'ko abordou o caso em que as variáveis da identidade standard de  $(M_n(F), t)$  são simétricas e estabeleceu que o  $*$ -polinômio  $St_{2n}(y_1, \dots, y_{2n})$  é uma  $*$ -identidade em variáveis simétricas de grau mínimo de  $(M_n(F), t)$ , para todo  $n \geq 1$ .

Alguns anos mais tarde, Rowen abordou a questão para a involução simplética no caso em que as variáveis do polinômio standard são simétricas e obteve que o  $*$ -polinômio  $St_{4m-2}(y_1, \dots, y_{4m-2})$  é uma  $*$ -identidade standard em variáveis simétricas de  $(M_{2m}(F), s)$ , para todo  $m \geq 1$ .

Nesse mesmo artigo, Rowen demonstrou que o grau mínimo de uma  $*$ -identidade standard em variáveis simétricas de  $(M_2(F), s)$  e  $(M_4(F), s)$  é igual a 2 e 6, respectivamente. Em vista disso, a seguinte conjectura foi posta.

**Conjectura 0.4.** (Rowen, [43]) *O grau mínimo de uma  $*$ -identidade standard em variáveis simétricas para  $(M_{2m}(F), s)$  é igual a  $4m - 2$ , para todo  $m \geq 1$ .*

Em 1992, em sua tese de doutorado, Adamsson [1] confirmou a conjectura de Rowen nos casos em que  $m = 3$  e  $m = 4$ , mostrando que o grau mínimo de uma  $*$ -identidade standard em variáveis simétricas de  $(M_6(F), s)$  e  $(M_8(F), s)$  são, respectivamente, 10 e 14.

Recentemente, em 2019, Bessades, Leal, dos Santos e Vieira [5] confirmaram essa conjectura para os casos em que  $k = 2^n$ , para todo  $n \geq 1$ , mostrando que o grau mínimo de uma  $*$ -identidade standard em variáveis simétricas de  $(M_{2^n}(F), s)$  é igual a  $2^{n+1} - 2$ , para todo  $n \geq 1$ .

Finalmente, em 2016, Giambruno, Ioppolo e Martino [18] consideraram o caso de variáveis antissimétricas em  $(M_{2m}(F), s)$  e concluíram a questão para este caso através do seguinte teorema.

**Teorema 0.5.** (Giambruno et al, [18]) *O  $*$ -polinômio  $St_{4m}(z_1, z_2, \dots, z_{4m})$  é uma  $*$ -identidade standard em variáveis antissimétricas de grau mínimo de  $(M_{2m}(F), s)$ , para todo  $m \geq 1$ .*

Nesse artigo, considerando variações necessárias, Giambruno, Ioppolo e Martino abordaram o estudo da minimalidade do grau de identidades standard no contexto de álgebras

---

de matrizes munidas de superinvolução. Instigados por esse estudo e por essas variações propostas em [18], nesta tese nos propomos a considerar o estudo da minimalidade do grau de identidades standard no contexto de  $*$ -superálgebras de matrizes. Desse modo, focamos em resolver as seguintes questões:

**Questão 1:** Determinar o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard cujas variáveis são pares, simétricas ou antissimétricas, de  $(M_{k,l}(F), t)$ .

**Questão 2:** Determinar o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard cujas variáveis são ímpares, simétricas ou antissimétricas, de  $(M_{k,l}(F), t)$ .

**Questão 3:** Determinar o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard cujas variáveis são pares, simétricas ou antissimétricas, de  $(M_{k,k}(F), s)$ .

**Questão 4:** Determinar o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard cujas variáveis são ímpares, simétricas ou antissimétricas, de  $(M_{k,k}(F), s)$ .

Para abordar algumas dessas questões usamos a interpretação gráfica, dada por Hutchinson [27] e Owens [35], para substituições de matrizes simétricas com relação a involução transposta no polinômio standard. Desse modo, algumas soluções propostas nesta tese foram obtidas usando métodos combinatoriais que, assim como ocorrem com os problemas discutidos por Hutchinson em [27], podem ser vistas como soluções para problemas envolvendo grafos.

Esta tese é constituída por três capítulos e um apêndice que estão organizados da seguinte maneira.

No Capítulo 1 definimos o polinômio standard e apresentamos algumas importantes propriedades deste polinômio. Apresentamos o Teorema de Amitsur e Levitzki no contexto ordinário e apresentamos os teoremas do tipo Amitsur e Levitzki que abordam o problema de determinar o grau mínimo de identidades standard para álgebras de matrizes no contexto de involução. Por fim, apresentamos o ambiente das  $*$ -superálgebras e introduzimos o problema de determinar o grau mínimo de identidades standard para álgebras de matrizes no contexto de involuções graduadas.

No Capítulo 2 abordamos o problema de determinar o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard para as  $*$ -superálgebras de matrizes munidas da involução transposta. Fornecemos precisamente o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard cujas variáveis são pares, simétricas ou antissimétricas, de  $(M_{k,l}(F), t)$ . No caso das  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard cujas variáveis são ímpares, simétricas ou antissimétricas, de  $(M_{k,l}(F), t)$  fornecemos cotas superiores e inferiores para o grau mínimo dessas  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades e posteriormente conjecturamos que as cotas inferiores fornecem de

---

fato o grau mínimo.

No Capítulo 3 é abordado o problema de determinar o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard para as  $*$ -superálgebras de matrizes munidas da involução simplética. Inicialmente, determinamos o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard cujas variáveis são pares, simétricas ou antissimétricas, de  $(M_{k,k}(F), s)$ . Em seguida, fornecemos o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard cujas variáveis são ímpares e antissimétricas de  $(M_{k,k}(F), s)$ . Por fim, estabelecemos uma conjectura para o grau mínimo no caso em que as variáveis consideradas nas  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard de  $(M_{k,k}(F), s)$  são ímpares e simétricas.

No Apêndice *A* estão apresentados todos os objetos e resultados da teoria de grafos que são necessários para as abordagens fornecidas em problemas tratados nos Capítulos 2 e 3. Desse modo, recomendamos que a leitura do Apêndice *A* seja realizada após o Capítulo 1. No Apêndice *B* apresentamos a demonstração do Teorema 2.15 que não foi incluída ao longo do Capítulo 2 a fim de manter a clareza da exposição.

Os resultados para variáveis pares (simétricas ou antissimétricas), tanto para o caso de involução transposta quanto para involução simplética, foram resolvidos em [6]. Os resultados para variáveis ímpares simétricas para o caso da involução simplética, estão apresentados em [7] e os resultados para variáveis ímpares (simétricas ou antissimétricas) no caso da involução transposta, serão apresentados em [8].

Por fim, é importante ressaltar que, assim como foi considerado nessa introdução, ao longo de todo o texto os corpos considerados têm característica zero e as álgebras consideradas são associativas.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo estabeleceremos alguns conceitos e resultados provenientes da teoria de PI-álgebras que serão necessários para exibir de modo claro o importante Teorema de Amitsur e Levitzki [2]. Dentre as diversas questões que surgem a partir do Teorema de Amitsur e Levitzki, a questão motivadora desta tese está relacionada ao grau mínimo de identidades standard. Nesse sentido, inicialmente apresentaremos as versões análogas para esta questão no contexto das álgebras de matrizes com involução. Finalmente, introduziremos as álgebras de matrizes com involução graduada e estabeleceremos os problemas que serão tratados nesta tese.

### 1.1 PI-álgebras e álgebras com involução

Ao longo de toda a tese consideraremos  $F$  um corpo de característica zero e  $A$  uma álgebra associativa sobre  $F$ . Denotaremos por  $F\langle X \rangle$  a álgebra livre unitária associativa gerada por um conjunto enumerável  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  de variáveis sobre  $F$ .

Um polinômio  $f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$  é dito uma *identidade polinomial* de  $A$ , e denotado por  $f \equiv 0$  em  $A$ , se  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$  para quaisquer elementos  $a_1, \dots, a_n \in A$ . Nitidamente o polinômio nulo é sempre uma identidade polinomial de uma álgebra. Desse modo, diremos que  $A$  é uma *PI-álgebra* se existir alguma identidade polinomial não nula de  $A$ .

O conjunto de todas as identidades polinomiais de  $A$  é um *T-ideal* de  $F\langle X \rangle$ , isto é,  $Id(A) = \{f \in F\langle X \rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}$  é um ideal bilateral de  $F\langle X \rangle$  invariante sob todos os endomorfismos de  $F\langle X \rangle$ . Um conjunto de geradores de  $Id(A)$  como um *T-ideal* é chamado de uma base de identidades polinomiais de  $A$ . É bem conhecido que, em característica zero, o *T-ideal* de uma álgebra é completamente determinado pelos seus polinômios multilineares (veja, por exemplo, [22, Corolário 1.3.9]). Convém lembrar que um polinômio é multilinear quando todas as suas variáveis aparecem em cada um dos seus monômios exatamente

uma vez e que para mostrar que um polinômio multilinear é uma identidade polinomial de uma álgebra  $A$ , basta mostrar que ele se anula sob quaisquer substituições tomadas em uma base da álgebra  $A$  como espaço vetorial sobre  $F$  (veja, [22, Observação 1.3.4]). Um exemplo importante de um polinômio multilinear é o chamado polinômio standard. O seu estudo é o objeto central desta tese e este polinômio é definido da seguinte maneira.

**Definição 1.1.** Definimos o polinômio standard de grau  $n$  como sendo o polinômio

$$St_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)},$$

onde  $S_n$  denota o grupo simétrico de grau  $n$  e  $\text{sgn}(\sigma)$  o sinal da permutação  $\sigma$ .

O polinômio standard tem diversas propriedades especiais. Dentre elas, usaremos com muita frequência as que serão apresentadas na seguinte proposição (ver demonstrações em, por exemplo, [22, Seção 1.5]).

**Proposição 1.2.** *O polinômio standard de grau  $n$  satisfaz:*

1.  $St_n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -St_n(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$ , para quaisquer  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Em outras palavras, o polinômio standard é alternado nas variáveis  $x_1, \dots, x_n$ .
2.  $St_n(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \text{sgn}(\sigma) St_n(x_1, \dots, x_n)$ , para toda  $\sigma \in S_n$ .
3. Dada uma álgebra  $A$ , se  $a_1, \dots, a_n \in A$  são linearmente dependentes sobre  $F$ , então  $St_n(a_1, \dots, a_n) = 0$ .
4.  $St_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x_i St_n(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$ , onde o símbolo  $\hat{x}_i$  denota a omissão da variável  $x_i$ . Em particular, a identidade standard de grau  $n+1$  é consequência da identidade standard de grau  $n$ .

Seja  $M_k(F)$  a álgebra de matrizes  $k \times k$  com entradas em  $F$ . Em 1950, Amitsur e Levitzki estabeleceram o seguinte importante teorema.

**Teorema 1.3.** *(Amitsur e Levitzki, [2]) O polinômio standard de grau  $2k$*

$$St_{2k}(x_1, \dots, x_{2k}) = \sum_{\sigma \in S_{2k}} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(2k)}$$

*é uma identidade polinomial da álgebra de matrizes  $M_k(F)$ . Além disso, não existe uma identidade polinomial de  $M_k(F)$  com grau menor que  $2k$ , e se  $k > 2$  ou a característica de  $F$  for diferente de 2 então, a menos de escalar,  $St_{2k}$  é a única identidade polinomial de grau  $2k$  satisfeita por  $M_k(F)$ .*

O Teorema de Amitsur e Levitzki é considerado uma das pedras angulares da teoria de PI-álgebras, pois além de ser um dos precursores da teoria, as diversas demonstrações que surgiram para esse teorema ao longo dos anos forneceram técnicas bastante diversificadas e frutíferas para área. A seguir elencamos algumas das diversas demonstrações conhecidas e alguns dos trabalhos que surgiram a partir das técnicas utilizadas em cada uma delas.

1. Em 1958, Kostant [30] apresentou uma demonstração usando a teoria de cohomologia para álgebras de Lie. O trabalho desenvolvido por Kostant em [30] influenciou diretamente nos trabalhos [23] e [31].
2. Em 1963, Swan [45] forneceu uma demonstração usando como ferramenta a teoria de grafos. As técnicas utilizadas nesta demonstração foram posteriormente trabalhadas nos artigos [4] e [39]. Em nosso estudo também iremos utilizar técnicas que foram inspiradas por essa demonstração. Por isso, no Apêndice A desta tese apresentamos os elementos da teoria de grafos utilizados nessa demonstração por Swan.
3. Em 1974, como consequência da teoria de identidades de traço e do Teorema de Cayley-Hamilton, Razmyslov [38] apresentou uma nova demonstração para o teorema. Posteriormente, a técnica utilizada por Razmyslov inspirou o artigo de Rowen [43] que, por sua vez, desencadeou nos trabalhos [17] e [25].
4. Em 1976, outra elegante demonstração, usando de modo astucioso a álgebra de Grassmann, foi fornecida por Rosset [40] e mais uma vez as técnicas usadas em [40] foram aplicadas em diversos trabalhos, por exemplo, em [3], [14], [18] e [20].
5. Alguns anos depois, Szigeti, Tuza e Révész forneceram uma nova demonstração em [39] usando também teoria de grafos. As construções feitas em [39] resultaram em diversas outras identidades para as álgebras de matrizes. Além disso, essas construções deram origem aos trabalhos [11], [12] e [32].
6. Finalmente, em 2004 Procesi apresentou a mais recente demonstração para o Teorema de Amitsur e Levitzki. Essa demonstração foi o primeiro passo dado por Procesi para estabelecer posteriormente o trabalho [9].

Para além das formidáveis demonstrações apresentadas para este teorema, diversas questões combinatórias da teoria de PI-álgebras ainda surgem a partir dele. Por exemplo, o fato do teorema estabelecer a minimalidade do grau de uma identidade polinomial de  $M_k(F)$  despertou o problema de determinar o grau mínimo de identidades standard em variáveis simétricas ou antissimétricas para a álgebra de matrizes  $M_k(F)$  munida de uma

involução. Por identidades standard queremos dizer polinômios standard que são também identidades e por grau mínimo de uma identidade standard de  $A$  queremos dizer o menor grau para o qual o polinômio standard é uma identidade polinomial de  $A$ .

Recordemos que uma aplicação linear  $*$ :  $A \rightarrow A$  é dita uma *involução do primeiro tipo* em  $A$ , se  $(a^*)^* = a$  e  $(ab)^* = b^*a^*$ , para todo  $a, b \in A$ . Ao longo desta tese iremos trabalhar apenas com involuções do primeiro tipo e por isso iremos denominá-las apenas de involução. Uma álgebra  $A$  munida com uma involução  $*$  é denotada por  $(A, *)$  e chamada de *\*-álgebra*. Nesse caso,  $A$  pode ser decomposta em uma soma direta de subespaços  $A = A^+ \oplus A^-$ , onde  $A^+ = (A, *)^+ = \{a \in A \mid a^* = a\}$  denota o conjunto dos elementos *simétricos* de  $A$  e  $A^- = (A, *)^- = \{a \in A \mid a^* = -a\}$  denota o conjunto dos elementos *antissimétricos* de  $A$ . É notório que a aplicação linear *transposta*

$$\begin{aligned} t: M_k(F) &\longrightarrow M_k(F) \\ (a_{ij}) &\longmapsto (a_{ji}) \end{aligned}$$

é uma involução em  $M_k(F)$ .

Por outro lado, note que dada uma matriz  $M \in M_{2m}(F)$  podemos escrevê-la na forma

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \text{onde } A, B, C, D \in M_m(F).$$

Mantendo essa partição em mente, definimos a chamada *involução simplética*, usando a sua forma explícita, dada pela fórmula:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{pmatrix}, \quad \text{onde } A, B, C, D \in M_m(F).$$

É conhecido que, quando  $F$  é um corpo algebricamente fechado, a involução transposta ( $t$ ) e a involução simplética ( $s$ ) são, a menos de equivalência, as únicas involuções em  $M_k(F)$  (veja, [42, Teorema 3.1.61]). É importante observar que a involução simplética está definida somente para matrizes de ordem par.

Considerando o conjunto enumerável  $X = \{x_1, x_1^*, x_2, x_2^*, \dots\}$  de variáveis não comutativas e definindo  $y_i = x_i + x_i^*$  e  $z_i = x_i - x_i^*$ , para todo  $i \geq 1$ , obtemos os conjuntos  $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$  de *variáveis simétricas* e  $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$  de *variáveis antissimétricas*. Assim, podemos considerar a álgebra livre com involução  $F\langle X, * \rangle = F\langle Y \cup Z, * \rangle = F\langle y_1, z_1, y_2, z_2, \dots \rangle$  como sendo gerada por *variáveis simétricas* e *antissimétricas*. Os elementos de  $F\langle X, * \rangle$  são chamados *\*-polinômios*. Desse modo, dizemos que o *\*-polinômio*  $f(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m) \in F\langle X, * \rangle$  é uma *\*-identidade* de  $(A, *)$  se

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m) = 0,$$

para quaisquer  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A^+$  e  $b_1, b_2, \dots, b_m \in A^-$ .

O problema de determinar o grau mínimo de  $*$ -identidades standard em variáveis simétricas ou antissimétricas de  $(M_k(F), *)$  é totalmente contemplado ao estudá-lo nos casos das  $*$ -álgebras  $(M_k(F), t)$  e  $(M_{2m}(F), s)$  (para mais detalhes ver [22, Teorema 3.6.8]). Desse modo, o primeiro progresso feito nesse problema foi realizado em 1958, por Kostant no artigo [30]. Nesse artigo além de expor uma demonstração diferente para o Teorema de Amitsur e Levitzki, Kostant demonstrou o seguinte.

**Teorema 1.4.** *(Kostant, [30]) O  $*$ -polinômio  $St_{2k-2}(z_1, \dots, z_{2k-2})$  é uma  $*$ -identidade standard em variáveis antissimétricas de  $(M_k(F), t)$ , para todo  $k > 1$  par.*

Alguns anos depois, Rowen em [41] estendeu o teorema de Kostant para todo  $k$  e também mostrou a minimalidade do grau de uma  $*$ -identidade standard em variáveis antissimétricas de  $(M_k(F), t)$ .

**Teorema 1.5.** *(Rowen, [41]) O  $*$ -polinômio  $St_{2k-2}(z_1, \dots, z_{2k-2})$  é uma  $*$ -identidade standard em variáveis antissimétricas de grau mínimo de  $(M_k(F), t)$ , para todo  $k \geq 2$ .*

Novamente, em 1982, Rowen revisitou o problema em [43] e obteve para o caso de  $*$ -identidades standard em variáveis simétricas de  $(M_{2m}(F), s)$  o seguinte teorema.

**Teorema 1.6.** *(Rowen, [43]) O  $*$ -polinômio  $St_{4m-2}(y_1, \dots, y_{4m-2})$  é uma  $*$ -identidade standard em variáveis simétricas de  $(M_{2m}(F), s)$ , para todo  $m \geq 1$ .*

Nesse mesmo artigo, Rowen mostrou que o grau mínimo de uma  $*$ -identidade standard em variáveis simétricas de  $(M_2(F), s)$  e  $(M_4(F), s)$  é igual a 2 e 6, respectivamente. Por esse motivo, ele conjecturou que  $4m - 2$  é, de fato, o grau mínimo para todo  $m$ .

Por fim, os casos de variáveis simétricas em  $(M_k(F), t)$  e de variáveis antissimétricas em  $(M_{2m}(F), s)$  foram considerados nos artigos [44] e [18] e completamente elucidados pelos teoremas a seguir.

**Teorema 1.7.** *(Slin'ko, [44]) O  $*$ -polinômio  $St_{2k}(y_1, \dots, y_{2k})$  é uma  $*$ -identidade em variáveis simétricas de grau mínimo de  $(M_k(F), t)$ , para todo  $k \geq 1$ .*

**Teorema 1.8.** *(Giamb Bruno et al, [18]) O  $*$ -polinômio  $St_{4m}(z_1, z_2, \dots, z_{4m})$  é uma  $*$ -identidade standard em variáveis antissimétricas de grau mínimo de  $(M_{2m}(F), s)$ , para todo  $m \geq 1$ .*

Inspirados na série de problemas discutidos acima, Giamb Bruno, Ioppolo e Martino em [18] diversificaram o estudo desses problemas ao considerá-los no contexto de álgebras de

matrizes com superinvoluções. Nesta tese estudaremos as variações desses problemas feitas em [18] para o contexto de álgebras de matrizes com involuções graduadas. Involuções graduadas nas álgebras de matrizes sobre um corpo algebricamente fechado foram classificadas por Giambruno, dos Santos e Vieira (ver [19]) e serão apresentadas na próxima seção.

## 1.2 Álgebras com involução graduada

Nesta seção faremos uma breve exposição das chamadas  $*$ -superálgebras com o objetivo de apresentar as involuções graduadas nas álgebras de matrizes e estabelecer a linguagem necessária para trabalharmos com identidades standard neste contexto.

Recordemos que uma álgebra  $A$  é dita uma *superálgebra* ou uma *álgebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduada*, se existem dois subespaços  $A_0$  e  $A_1$ , tais que

$$A = A_0 \oplus A_1, \quad A_0A_0 + A_1A_1 \subseteq A_0 \quad \text{e} \quad A_1A_0 + A_0A_1 \subseteq A_1.$$

Neste caso, diremos que  $A_0$  é a componente par de  $A$  (ou a componente de grau homogêneo zero) e que  $A_1$  é a componente ímpar de  $A$  (ou a componente de grau homogêneo um)

**Definição 1.9.** Uma superálgebra  $A = A_0 \oplus A_1$  munida de uma involução  $*$  é dita uma  *$*$ -superálgebra* se  $A_0^* = A_0$  e  $A_1^* = A_1$ . Nesse caso, dizemos que a involução  $*$  é uma *involução graduada* em  $A$ .

Seja  $A = A_0 \oplus A_1$  uma  $*$ -superálgebra. Pode ser mostrado que  $A^+$  e  $A^-$  são subespaços graduados de  $A$ , ou seja, podemos decompor  $A$  como uma soma direta de quatro subespaços

$$A = A_0^+ \oplus A_0^- \oplus A_1^+ \oplus A_1^-,$$

onde para cada  $i = 0, 1$ ,  $A_i^+ = \{a \in A_i \mid a^* = a\}$  denota o conjunto dos elementos homogêneos de grau  $i$  simétricos de  $A$  e  $A_i^- = \{a \in A_i \mid a^* = -a\}$  denota o conjunto dos elementos homogêneos de grau  $i$  antissimétricos de  $A$ .

Existem diversos exemplos de  $*$ -superálgebras. Aqui estamos interessados especificamente nas  *$*$ -superálgebras de matrizes* que serão definidas agora. Em 1963, Wall [47] demonstrou que, quando  $F$  é um corpo algebricamente fechado, a menos de isomorfismo, qualquer  $\mathbb{Z}_2$ -gradação em  $M_n(F)$  é dada por

$$M_{k,l}(F)_0 := \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \mid A \in M_k(F); D \in M_l(F) \right\}$$

$$\text{e } M_{k,l}(F)_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \mid B \in M_{k \times l}(F); C \in M_{l \times k}(F) \right\},$$

onde  $k + l = n$  e  $k \geq l \geq 0$ . Ou seja, para cada par de inteiros  $k, l$ , com  $k \geq l \geq 0$ , temos uma superálgebra de matrizes com a  $\mathbb{Z}_2$ -graduação definida acima, denotada por  $M_{k,l}(F)$ .

No artigo [19, Theorem 7.6] os autores provaram que, quando  $F$  é um corpo algebricamente fechado, a menos de isomorfismo, as únicas involuções graduadas que podem ser definidas em  $M_{k,l}(F)$  são a involução transposta ( $t$ ) e a involução simplética ( $s$ ), onde a involução simplética ocorre somente quando  $k = l$  e  $l \neq 0$  ou quando  $l = 0$  e  $k$  é par. Entretanto, em ambos os casos não abordaremos o caso  $l = 0$ , já que nesse caso a graduação é trivial. Mais detalhadamente, trabalharemos com as seguintes  $*$ -superálgebras de matrizes:

- A  $*$ -superálgebra  $(M_{k,l}(F), t)$ , onde  $k \geq l > 0$ . Nesse caso, os quatro subespaços de elementos homogêneos simétricos e antissimétricos obtidos são os seguintes.

$$\begin{aligned} (M_{k,l}(F), t)_0^+ &= \left\{ \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S' \end{pmatrix} \mid S \in (M_k(F), t)^+ \text{ e } S' \in (M_l(F), t)^+ \right\}, \\ (M_{k,l}(F), t)_0^- &= \left\{ \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K' \end{pmatrix} \mid K \in (M_k(F), t)^- \text{ e } K' \in (M_l(F), t)^- \right\}, \\ (M_{k,l}(F), t)_1^+ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{pmatrix} \mid A \in M_{k \times l}(F) \right\}, \\ (M_{k,l}(F), t)_1^- &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^t & 0 \end{pmatrix} \mid A \in M_{k \times l}(F) \right\}. \end{aligned}$$

- A  $*$ -superálgebra  $(M_{k,k}(F), s)$ , onde  $k > 0$ . Nesse caso, os quatro subespaços de elementos homogêneos simétricos e antissimétricos obtidos são:

$$\begin{aligned} (M_{k,k}(F), s)_0^+ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^t \end{pmatrix} \mid A \in M_k(F) \right\}, \\ (M_{k,k}(F), s)_0^- &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^t \end{pmatrix} \mid A \in M_k(F) \right\}, \\ (M_{k,k}(F), s)_1^+ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & K \\ K' & 0 \end{pmatrix} \mid K \in (M_k(F), t)^- \text{ e } K' \in (M_k(F), t)^- \right\}, \\ (M_{k,k}(F), s)_1^- &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & S \\ S' & 0 \end{pmatrix} \mid S \in (M_k(F), t)^+ \text{ e } S' \in (M_k(F), t)^+ \right\}. \end{aligned}$$

Agora estabeleceremos a noção de identidades polinomiais no contexto de  $*$ -superálgebras. Para isso, consideramos  $X$  um conjunto enumerável de variáveis não comutativas e repartimos esse conjunto em uma união disjunta de quatro conjuntos enumeráveis  $X = Y_0 \cup Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$ , onde  $Y_0 = \{y_{1,0}, y_{2,0}, \dots\}$ ,  $Y_1 = \{y_{1,1}, y_{2,1}, \dots\}$ ,  $Z_0 = \{z_{1,0}, z_{2,0}, \dots\}$  e  $Z_1 = \{z_{1,1}, z_{2,1}, \dots\}$ . Dessa forma, definimos a  $*$ -superálgebra livre  $\mathcal{F} = F\langle X | \mathbb{Z}_2, * \rangle$  gerada por  $X$  da seguinte maneira: estabelecemos que as variáveis em  $Y_0 \cup Z_0$  têm grau homogêneo 0 (ou grau par) e que as variáveis em  $Y_1 \cup Z_1$  têm grau

homogêneo 1 (ou grau ímpar). Definimos  $\mathcal{F}_0$  como sendo o subespaço gerado por todos os monômios com um número par de variáveis de grau homogêneo 1 e  $\mathcal{F}_1$  como sendo o subespaço gerado por todos os monômios com um número ímpar de variáveis de grau homogêneo 1.

Por fim, definimos a involução em  $\mathcal{F}$  considerando que as variáveis em  $Y_0 \cup Y_1$  são simétricas e que as variáveis em  $Z_0 \cup Z_1$  são antissimétricas. Desse modo, é fácil ver que  $(\mathcal{F}_0)^* = \mathcal{F}_0$  e que  $(\mathcal{F}_1)^* = \mathcal{F}_1$ , ou seja, a superálgebra livre  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1$  com essa involução tem uma estrutura de  $*$ -superálgebra. Os elementos de  $\mathcal{F}$  são então chamados de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -polinômios.

**Definição 1.10.** Seja  $f(y_{1,0}, \dots, y_{m,0}, y_{1,1}, \dots, y_{n,1}, z_{1,0}, \dots, z_{p,0}, z_{1,1}, \dots, z_{q,1}) \in F\langle X | \mathbb{Z}_2, * \rangle$ . Dizemos que  $f$  é uma  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidade de uma  $*$ -superálgebra  $A$ , se

$$f(a_{1,0}, \dots, a_{m,0}, a_{1,1}, \dots, a_{n,1}, b_{1,0}, \dots, b_{p,0}, b_{1,1}, \dots, b_{q,1}) = 0,$$

para quaisquer elementos  $a_{1,0}, \dots, a_{m,0} \in A_0^+$ ,  $a_{1,1}, \dots, a_{n,1} \in A_1^+$ ,  $b_{1,0}, \dots, b_{p,0} \in A_0^-$  e  $b_{1,1}, \dots, b_{q,1} \in A_1^-$ . Nesse caso, escrevemos que  $f \equiv 0$  em  $A$ .

O conjunto de todas as  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades polinomiais de  $A$  é um  $T_2^*$ -ideal de  $F\langle X | \mathbb{Z}_2, * \rangle$ , isto é,  $Id^{gri}(A) = \{f \in F\langle X | \mathbb{Z}_2, * \rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}$  é um ideal bilateral de  $F\langle X | \mathbb{Z}_2, * \rangle$  invariante sob todos os endomorfismos graduados de  $F\langle X | \mathbb{Z}_2, * \rangle$  que comutam com a involução  $*$ . Também neste caso é conhecido que, em característica zero, o  $T_2^*$ -ideal de uma  $*$ -superálgebra associativa é completamente determinado pelos seus polinômios multilineares.

Assim como ocorre no contexto ordinário e de involuções, também no caso das  $*$ -superálgebras de matrizes  $(M_{k,l}(F), t)$  e  $(M_{k,k}(F), s)$  pouco ainda se sabe a respeito dos seus respectivos  $T_2^*$ -ideais, fazendo com que diversas questões que são estudadas no contexto de involução sejam também pertinentes neste contexto. Entre elas, estaremos especialmente interessados nas questões relacionadas ao Teorema de Amitsur e Levitzki que foram discutidas na seção anterior no contexto de involução. Note que, em consequência dos Teoremas 1.5, 1.6, 1.7 e 1.8, temos as seguintes proposições no contexto de  $*$ -superálgebras.

**Proposição 1.11.** *O  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -polinômio standard de grau  $2(k+l)$  em variáveis simétricas, pares ou ímpares é uma  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidade de  $(M_{k,l}(F), t)$ , para todo  $k \geq l > 0$ .*

**Proposição 1.12.** *O  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -polinômio standard de grau  $2(k+l) - 2$  em variáveis antissimétricas, pares ou ímpares é uma  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidade de  $(M_{k,l}(F), t)$ , para todo  $k \geq l > 0$ .*

**Proposição 1.13.** *O  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -polinômio standard de grau  $4k - 2$  em variáveis simétricas, pares ou ímpares é uma  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidade de  $(M_{k,k}(F), s)$ , para todo  $k > 0$ .*

**Proposição 1.14.** *O  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -polinômio standard de grau  $4k$  em variáveis antissimétricas, pares ou ímpares é uma  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidade de  $(M_{k,k}(F), s)$ , para todo  $k > 0$ .*

Apesar das proposições acima nos fornecerem, em cada caso, uma cota superior para o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis de uma mesma componente de  $(M_{k,l}(F), t)$  e de  $(M_{k,k}(F), s)$ , ainda não foi estabelecido na literatura se esses são ou não, respectivamente, os graus mínimos para essas  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard. Assim, forneceremos nos próximos capítulos novas informações que foram obtidas acerca dessa questão.

# Capítulo 2

## Involução graduada transposta

Neste capítulo abordaremos o problema de determinar o grau mínimo de identidades standard da  $*$ -superálgebra de matrizes  $(M_{k,l}(F), t)$ . Iniciaremos fornecendo o grau mínimo no caso em que todas as variáveis do polinômio standard são pares, simétricas ou antissimétricas. Em seguida, abordaremos o problema em variáveis ímpares, simétricas ou antissimétricas e veremos que para obter o grau mínimo nos dois casos, bastará resolver o problema em apenas um deles. Em vista disso, finalizaremos o capítulo fornecendo informações sobre o grau mínimo de identidades standard em variáveis ímpares simétricas de  $(M_{k,l}(F), t)$ .

### 2.1 Variáveis pares simétricas ou antissimétricas

Nesta seção determinaremos o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis pares, simétricas ou antissimétricas de  $(M_{k,l}(F), t)$ . Os resultados que serão aqui apresentados estão publicados em [6]. Efetivamente, mostraremos que o grau mínimo no caso de variáveis pares simétricas é igual a  $2k$ , para todo  $k \geq l \geq 1$ , e é igual a  $2k - 2$  no caso de variáveis pares antissimétricas, para todo  $k \geq 2$  e  $k \geq l \geq 1$ .

A fim de demonstrarmos os resultados desta seção recordemos que os subespaços pares, simétricos e antissimétricos de  $(M_{k,l}(F), t)$  são, respectivamente,

$$(M_{k,l}(F), t)_0^+ = \left\{ \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S' \end{pmatrix} \mid S \in (M_k(F), t)^+ \text{ e } S' \in (M_l(F), t)^+ \right\} \text{ e}$$

$$(M_{k,l}(F), t)_0^- = \left\{ \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K' \end{pmatrix} \mid K \in (M_k(F), t)^- \text{ e } K' \in (M_l(F), t)^- \right\}.$$

**Teorema 2.1.** *O grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis pares simétricas de  $(M_{k,l}(F), t)$  é igual a  $2k$ , para todo  $k \geq l \geq 1$ .*

**Demonstração.** Sejam  $S_{1,0}, \dots, S_{r,0} \in (M_{k,l}(F), t)_0^+$ . Então,

$$S_{i,0} = \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & B_i \end{pmatrix}, \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq r,$$

onde  $A_1, \dots, A_r \in (M_k(F), t)^+$  e  $B_1, \dots, B_r \in (M_l(F), t)^+$ .

Desse modo,

$$\begin{aligned} St_r(S_{1,0}, \dots, S_{r,0}) &= St_r \left( \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & B_r \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} St_r(A_1, \dots, A_r) & 0 \\ 0 & St_r(B_1, \dots, B_r) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como  $A_1, \dots, A_r$  são matrizes simétricas  $k \times k$  e  $B_1, \dots, B_r$  são matrizes simétricas  $l \times l$ , pelo Teorema 1.7, concluímos que  $St_r(A_1, \dots, A_r) = 0$  e  $St_r(B_1, \dots, B_r) = 0$ , para quaisquer  $A_1, \dots, A_r$  e  $B_1, \dots, B_r$ , se, e somente se,  $r \geq 2k$  e  $r \geq 2l$ . Em consequência disso e lembrando que  $k \geq l \geq 1$ , obtemos que  $St_r(S_{1,0}, \dots, S_{r,0}) = 0$  se, e somente se,  $r \geq 2k$ . Portanto, o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis pares simétricas de  $(M_{k,l}(F), t)$  é igual a  $2k$ , para todo  $k \geq l \geq 1$ . ■

O teorema a seguir estabelecerá o grau mínimo para identidades standard em variáveis antissimétricas pares de  $(M_{k,l}(F), t)$ .

**Teorema 2.2.** *O grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis pares antissimétricas de  $(M_{k,l}(F), t)$  é igual a  $2k - 2$ , para todo  $k \geq 2$  e  $k \geq l \geq 1$ .*

**Demonstração.** Sejam  $K_{1,0}, \dots, K_{r,0} \in (M_{k,l}(F), t)_0^-$ . Sabemos que,

$$K_{i,0} = \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & B_i \end{pmatrix}, \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq r,$$

onde  $A_1, \dots, A_r \in (M_k(F), t)^-$  e  $B_1, \dots, B_r \in (M_l(F), t)^-$ .

Assim,

$$\begin{aligned} St_r(K_{1,0}, K_{2,0}, \dots, K_{r,0}) &= St_r \left( \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & B_r \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} St_r(A_1, \dots, A_r) & 0 \\ 0 & St_r(B_1, \dots, B_r) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como  $A_1, \dots, A_r$  são matrizes antissimétricas  $k \times k$  e  $B_1, \dots, B_r$  são matrizes antisimétricas  $l \times l$ , pelo Teorema 1.5, temos que  $St_r(A_1, \dots, A_r) = 0$  e  $St_r(B_1, \dots, B_r) = 0$  se, e somente se,  $r \geq 2k - 2$  e  $r \geq 2l - 2$ . Em consequência disso e lembrando que  $k \geq l \geq 1$ , obtemos que  $St_r(K_{1,0}, \dots, K_{r,0}) = 0$  se, e somente se,  $r \geq 2k - 2$ . Portanto, o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidade standard em variáveis pares antissimétricas de  $(M_{k,l}(F), t)$  é igual a  $2k - 2$ , para todo  $k \geq 2$  e  $k \geq l \geq 1$ . ■

Note que as demonstrações dos teoremas acima nos esclarecem que o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis pares, simétricas ou antissimétricas de  $(M_{k,l}(F), t)$  está diretamente relacionados ao grau mínimo de identidades standard de  $(M_k(F), t)$ . Mais que isso, essas demonstrações nos mostram que essa relação é ainda mais profunda, sendo possível na realidade relacionar o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades multilineares em variáveis pares, simétricas ou antissimétricas de  $(M_{k,l}(F), t)$ , com o grau mínimo de  $*$ -identidades multilineares em variáveis simétricas ou antissimétricas satisfeitas por  $(M_k(F), t)$ . Dessa forma, usando o Teorema 1.7 e argumentos semelhantes aos utilizados nas demonstrações acima podemos estabelecer o seguinte.

**Teorema 2.3.** *O grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades em variáveis pares simétricas de  $(M_{k,l}(F), t)$  é igual a  $2k$ , para todo  $k \geq l \geq 1$ .*

## 2.2 Variáveis ímpares simétricas ou antissimétricas

Nesta seção determinaremos o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis ímpares, simétricas ou antissimétricas de  $(M_{k,l}(F), t)$ . Iremos inicialmente mostrar que o grau mínimo no caso simétrico coincide com o grau mínimo no caso antissimétrico. Posteriormente, através dessa observação, estabeleceremos uma cota superior para o grau mínimo em ambos os casos e em seguida concentraremos o nosso estudo no grau mínimo do caso ímpar simétrico. Nesse sentido, para valores gerais de  $k$  e  $l$ , forneceremos cotas inferiores para o grau mínimo, que dependem da paridade de  $k$  e de  $l$ , e para alguns valores de  $k$  e  $l$  iremos determinar o grau mínimo precisamente.

Vamos começar lembrando que os subespaços ímpares simétricos e antissimétricos de  $(M_{k,l}(F), t)$  são, respectivamente,

$$(M_{k,l}(F), t)_1^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{pmatrix} \mid A \in M_{k \times l}(F) \right\},$$

$$(M_{k,l}(F), t)_1^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^t & 0 \end{pmatrix} \mid A \in M_{k \times l}(F) \right\}.$$

**Proposição 2.4.** *O  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -polinômio standard  $St_r(y_{1,1}, \dots, y_{r,1})$  é uma  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidade polinomial de  $(M_{k,l}(F), t)$  se, e somente se,  $St_r(z_{1,1}, \dots, z_{r,1})$  é uma  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidade polinomial de  $(M_{k,l}(F), t)$ .*

**Demonstração.** Sejam  $V_1^+, \dots, V_r^+ \in (M_{k,l}(F), t)_1^+$ . Então,

$$V_i^+ = \begin{pmatrix} 0 & B_i \\ B_i^t & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq r,$$

onde  $B_1, \dots, B_r \in M_{k \times l}(F)$ .

Definimos

$$C = \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) B_{\sigma(1)} B_{\sigma(2)}^t B_{\sigma(3)} B_{\sigma(4)}^t \dots B_{\sigma(r-1)} B_{\sigma(r)}^t, \quad \text{para } r \text{ par};$$

$$D = \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) B_{\sigma(1)}^t B_{\sigma(2)} B_{\sigma(3)}^t B_{\sigma(4)} \dots B_{\sigma(r-1)}^t B_{\sigma(r)}, \quad \text{para } r \text{ par};$$

$$C' = \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) B_{\sigma(1)} B_{\sigma(2)}^t B_{\sigma(3)} B_{\sigma(4)}^t \dots B_{\sigma(r-1)} B_{\sigma(r)}, \quad \text{para } r \text{ ímpar};$$

$$D' = \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) B_{\sigma(1)}^t B_{\sigma(2)} B_{\sigma(3)}^t B_{\sigma(4)} \dots B_{\sigma(r-1)} B_{\sigma(r)}^t, \quad \text{para } r \text{ ímpar}.$$

Portanto, se  $r$  for par, temos que

$$St_r(V_1^+, \dots, V_r^+) = St_r \left( \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_1^t & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & B_r \\ B_r^t & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

e se  $r$  for ímpar, temos que

$$St_r(V_1^+, \dots, V_r^+) = St_r \left( \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_1^t & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & B_r \\ B_r^t & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & C' \\ D' & 0 \end{pmatrix}.$$

Desse modo, concluímos que  $St_r(V_1^+, \dots, V_r^+) = 0$  se, e somente se,  $C = 0$  e  $D = 0$ , se  $r$  for par e  $St_r(V_1^+, \dots, V_r^+) = 0$  se, e somente se,  $C' = 0$  e  $D' = 0$ , se  $r$  for ímpar. De modo similar, dados  $V_1^-, \dots, V_r^- \in (M_{k,l}(F), t)_1^-$ , onde

$$V_i^- = \begin{pmatrix} 0 & B_i \\ -B_i^t & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq r,$$

obtemos que

$$St_r(V_1^-, \dots, V_r^-) = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad \text{se } r \equiv 0 \pmod{4};$$

$$St_r(V_1^-, \dots, V_r^-) = \begin{pmatrix} -C & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix}, \quad \text{se } r \equiv 2 \pmod{4};$$

$$St_r(V_1^-, \dots, V_r^-) = \begin{pmatrix} 0 & C' \\ -D' & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{se } r \equiv 1 \pmod{4};$$

$$St_r(V_1^-, \dots, V_r^-) = \begin{pmatrix} 0 & -C' \\ D' & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{se } r \equiv 3 \pmod{4}.$$

Portanto,  $St_r(V_1^-, \dots, V_r^-) = 0$  se, e somente se,  $C = 0$  e  $D = 0$ , se  $r$  for par e  $St_r(V_1^-, \dots, V_r^-) = 0$  se, e somente se,  $C' = 0$  e  $D' = 0$ , se  $r$  for ímpar. Assim,  $St_r(V_1^+, \dots, V_r^+) = 0$  se, e somente se,  $St_r(V_1^-, \dots, V_r^-) = 0$ . Visto que, para toda substituição de matrizes  $V_1^+, \dots, V_r^+ \in (M_{k,l}(F), t)_1^+$  podemos associar uma substituição  $V_1^-, \dots, V_r^- \in (M_{k,l}(F), t)_1^-$  e vice-versa, segue que  $St_r(y_{1,1}, \dots, y_{r,1}) \equiv 0$  em  $(M_{k,l}(F), t)$  se, e somente se,  $St_r(z_{1,1}, \dots, z_{r,1}) \equiv 0$  em  $(M_{k,l}(F), t)$ . ■

O lema a seguir estabelece uma cota superior para o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ - identidades standard em variáveis ímpares antissimétricas e considerando a proposição acima, a mesma cota será válida para variáveis ímpares simétricas.

**Lema 2.5.** *Sejam  $k$  e  $l$  naturais, tais que  $k \geq l \geq 1$ . Se  $r \geq \min\{kl + 1, 2k + 2l - 2\}$ , então  $St_r(z_{1,1}, z_{2,1}, \dots, z_{r,1})$  é uma  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidade polinomial de  $(M_{k,l}(F), t)$ .*

**Demonstração.** Sejam  $V_1^-, \dots, V_r^- \in (M_{k,l}(F), t)_1^-$ . Pelo Teorema 1.5, temos que

$$St_r(V_1^-, \dots, V_r^-) = 0, \quad \text{para todo } r \geq 2(k + l) - 2 = 2k + 2l - 2.$$

Por outro lado, como  $\dim_F (M_{k,l}(F), t)_1^- = kl$  e o polinômio standard é alternado, obtemos que

$$St_r(V_1^-, \dots, V_r^-) = 0, \quad \text{para todo } r \geq kl + 1.$$

Desse modo, obtemos que se  $r \geq \min\{kl + 1, 2k + 2l - 2\}$ , então  $St_r(z_{1,1}, \dots, z_{r,1}) \equiv 0$  em  $(M_{k,l}(F), t)$ . ■

Mantendo sempre em mente a Proposição 2.4, iremos daqui em diante estudar o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis ímpares simétricas de  $(M_{k,l}(F), t)$ . Denotaremos esse grau mínimo por  $mdeg((St)_1^+)$ .

Nesse sentido, usaremos em diversos resultados a interpretação dada por Hutchinson [27] e Owens [35] para substituições de matrizes simétricas com relação a involução transposta no polinômio standard. Essa interpretação é baseada em conceitos e resultados oriundos da teoria de grafos, que estão apresentados no Apêndice desta tese. Estes resultados também serão utilizados no próximo capítulo, onde estudaremos a situação com a involução simplética. Desta forma, para uma melhor compreensão dos conceitos, notações e resultados que usaremos aqui, recomendamos uma rápida leitura do Apêndice.

Denotaremos por  $t_{ij}$ , onde  $1 \leq i \leq j \leq n$ , a matriz simétrica elementar  $e_{ij} + (1 - \delta_{ij})e_{ji}$ , em que  $\delta_{ij}$  denota o delta de Kronecker. Então, dado um conjunto  $S = \{t_{i_1 j_1}, \dots, t_{i_r j_r}\}$  de matrizes simétricas elementares distintas, definiremos um grafo  $G(S) = (V(G), E(G))$ , em que  $V(G) = \{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r\}$  é o conjunto de vértices e  $E(G) = \{\{i_s, j_s\} \mid t_{i_s j_s} \in S\}$  é o conjunto de arestas. Assim, nos basearemos no seguinte teorema devido a Owens [35].

**Teorema 2.6.** *A  $(i, j)$ -ésima entrada da matriz  $St_r(t_{i_1 j_1}, \dots, t_{i_r j_r})$  é igual a  $\sum \text{sgn}(w)$ , em que essa soma percorre todos os caminhos  $w$  eulerianos<sup>1</sup> de  $G(S)$  que ligam o vértice  $i$  ao vértice  $j$ . Caso não existam caminhos eulerianos ligando o vértice  $i$  ao vértice  $j$ , ou não existam esses vértices no grafo  $G(S)$ , então a  $(i, j)$ -ésima entrada de  $St_r(t_{i_1 j_1}, \dots, t_{i_r j_r})$  é nula. Em particular, caso o grafo  $G(S)$  seja desconexo, então a matriz  $St_r(t_{i_1 j_1}, \dots, t_{i_r j_r})$  é a matriz nula.*

Na demonstração deste Teorema por Owens, salientam-se os seguintes fatos:

1. A multiplicação de duas matrizes simétricas elementares distintas  $t_{ij}$  e  $t_{hl}$  é, em cada caso, dada por

$$t_{ii}t_{hl} = \begin{cases} e_{il}, & \text{se } i = h \\ e_{ih}, & \text{se } i = l \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad t_{hl}t_{ii} = \begin{cases} e_{li}, & \text{se } h = i \\ e_{hi}, & \text{se } l = i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$t_{ij}t_{hl} = \begin{cases} e_{il}, & \text{se } j = h \\ e_{ih}, & \text{se } j = l \\ e_{jl}, & \text{se } i = h \\ e_{jh}, & \text{se } i = l \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad t_{ii}t_{hh} = 0.$$

---

<sup>1</sup>Ver a Definição A.2 de caminhos eulerianos dada no apêndice A.

2. Os possíveis caminhos que podem ser formados com as arestas distintas associadas  $\{i, j\}$  e  $\{h, l\}$  (denotados por  $w_{kr}$  para indicar que o vértice  $k$  foi ligado ao vértice  $r$ ), são dados por

$$\begin{aligned} \{i, i\}\{h, l\} &= \begin{cases} w_{il}, & \text{se } i = h \\ w_{ih}, & \text{se } i = l \\ \emptyset, & \text{caso contrário.} \end{cases} & \{h, l\}\{i, i\} &= \begin{cases} w_{li}, & \text{se } h = i \\ w_{hi}, & \text{se } l = i \\ \emptyset, & \text{caso contrário.} \end{cases} \\ \{i, j\}\{h, l\} &= \begin{cases} w_{il}, & \text{se } j = h \\ w_{ih}, & \text{se } j = l \\ w_{jl}, & \text{se } i = h \\ w_{jh}, & \text{se } i = l \\ \emptyset, & \text{caso contrário.} \end{cases} & \{i, i\}\{h, h\} &= \emptyset. \end{aligned}$$

Desse modo, qualquer produto de matrizes simétricas elementares  $t_{i_1 j_1} \dots t_{i_r j_r}$  é não nulo se, e somente se, a sequência de arestas  $\{i_1, j_1\} \dots \{i_r, j_r\}$  (com os vértices não necessariamente nessa ordem) forma um caminho euleriano em  $G(S)$ . Nesse caso, temos que  $t_{i_1 j_1} \dots t_{i_r j_r} = e_{rs}$ , onde  $r = i_1$  ou  $r = j_1$  é o vértice no qual o caminho tem início e  $s = i_r$ , ou  $s = j_r$  é o vértice no qual o caminho termina. Portanto, qualquer monômio  $t_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(1)}} \dots t_{i_{\sigma(r)} j_{\sigma(r)}}$  não-nulo de  $St_r(t_{i_1 j_1}, \dots, t_{i_r j_r})$  que resulta na matriz elementar  $e_{ij}$  está associado ao caminho euleriano  $\{i_{\sigma(1)}, j_{\sigma(1)}\} \dots \{i_{\sigma(r)}, j_{\sigma(r)}\}$  (novamente não necessariamente os vértices nas arestas estão ligados nessa ordem) que tem início no vértice  $i$  e término no vértice  $j$ . Além disso, temos que<sup>2</sup>  $\text{sgn}(\{i_{\sigma(1)}, j_{\sigma(1)}\} \dots \{i_{\sigma(r)}, j_{\sigma(r)}\}) = \text{sgn}(\sigma)$ , de onde segue o resultado.

Desse modo, em função do Teorema 2.6 podemos concluir o seguinte.

**Corolário 2.7.** *Um grafo associado a uma substituição de  $r$  matrizes elementares simétricas é cancelador<sup>3</sup> se, e somente se, essa substituição anula o polinômio standard de grau  $r$ .*

Retomando a discussão sobre o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard de  $(M_{k,l}(F), t)$ , o Lema 2.5 nos fornece que  $mdeg((St)_1^+) \leq \min\{kl + 1, 2k + 2l - 2\}$ . Agora, pode-se observar que  $kl + 1 \leq 2k + 2l - 2$  se, e somente se,  $(l - 2)(k - 2) \leq 1$ . Como  $k \geq l \geq 1$ , obtemos que  $(l - 2)(k - 2) \leq 1$  nos seguintes casos:

1.  $l = 1$  e  $k \geq 1$ ;
2.  $l = 2$  e  $k \geq 2$ ;
3.  $l = 3$  e  $k = 3$ .

<sup>2</sup>Veja a Definição A.12 do sinal de um caminho euleriano.

<sup>3</sup>Veja a Definição A.13 de grafo cancelador.

No primeiro caso veremos que, se  $l = 1$  e  $k = 1$  ou  $k = 2$ , então  $mdeg((St)_1^+) = kl + 1$ . Contudo, quando  $l = 1$  e  $k \geq 3$ , veremos que  $mdeg((St)_1^+) = 3$ , independentemente do valor de  $k$ .

De fato, se  $l = 1$  e  $k = 1$ , então o grau mínimo para  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis ímpares simétricas de  $(M_{1,1}(F), t)$  é igual a 2, pois o polinômio standard é alternado e  $(M_{1,1}(F), t)_1^+ = \text{span}_F\{e_{12} + e_{21}\}$ . Além do mais, se  $l = 1$  e  $k = 2$ , temos que  $mdeg((St)_1^+) = 3$ , novamente pelo fato de o polinômio standard ser alternado e de nesse caso  $(M_{2,1}(F), t)_1^+ = \text{span}_F\{e_{13} + e_{31}, e_{23} + e_{32}\}$ .

**Teorema 2.8.** *O grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis ímpares simétricas de  $(M_{k,1}(F), t)$  é igual a 3, para todo  $k \geq 3$ .*

**Demonstração.** Observe que  $St_2(e_{1,k+1} + e_{k+1,1}, e_{2,k+1} + e_{k+1,2}) = e_{12} - e_{21} \neq 0$ . Então, nos resta mostrar que  $St_3(y_{1,1}, y_{2,1}, y_{3,1}) \equiv 0$  em  $(M_{k,1}(F), t)$ , para todo  $k \geq 3$ . Para tanto, pela Proposição 1.2, basta mostrarmos que  $St_3(y_{1,1}, y_{2,1}, y_{3,1})$  se anula para quaisquer substituições de matrizes simétricas distintas tomadas no subespaço

$$(M_{k,1}(F), t)_1^+ = \text{span}_F\{e_{i,k+1} + e_{k+1,i} \mid 1 \leq i \leq k\}.$$

Desse modo, considere  $\alpha_r = e_{r,k+1} + e_{k+1,r}$ ,  $\beta_s = e_{s,k+1} + e_{k+1,s}$  e  $\gamma_t = e_{t,k+1} + e_{k+1,t}$ , com  $r, s, t \in \{1, 2, \dots, k\}$  distintos e observe que  $\alpha_r \beta_s \gamma_t = 0$ , isto é, o produto de quaisquer 3 elementos em  $(M_{k,1}(F), t)_1^+$  é sempre nulo. Portanto,  $St_3(y_{1,1}, y_{2,1}, y_{3,1}) \equiv 0$  em  $(M_{k,1}(F), t)$ . ■

Agora abordaremos o segundo caso, isto é, o caso em que  $l = 2$  e  $k \geq 2$ . Vamos mostrar que nesse caso o grau mínimo é  $kl + 1$ . Para isso, precisaremos do seguinte lema.

**Lema 2.9.** *Sejam  $k \geq 2$  e  $f_1, \dots, f_{2k}$  elementos de  $(M_{k,2}(F), t)_1^+$  definidos por*

$$f_i = e_{i,k+1} + e_{k+1,i} \quad e \quad f_{k+i} = e_{i,k+2} + e_{k+2,i}, \quad \text{onde } 1 \leq i \leq k.$$

Então, o seguinte ocorre

1.  $e_{11} St_{2k}(f_1, \dots, f_{2k}) e_{11} = -2(k-1)! e_{11}$ , se  $k$  é par;
2.  $e_{k+1,k+1} St_{2k}(f_1, \dots, f_{2k}) e_{k+2,k+2} = k! e_{k+1,k+2}$ , se  $k$  é ímpar.

**Demonstração.** Vamos começar considerando o caso em que  $k$  é par. Usaremos aqui o Teorema 2.6. Para isso, vamos considerar a substituição  $S = \{f_1, \dots, f_{2k}\}$  e o grafo

conexo associado a substituição  $S$ , isto é,  $G(S) = (V(G), E(G))$ , para o qual temos que  $V(G) = \{1, 2, \dots, k, k + 1, k + 2\}$  e  $E(G) = \{f_1, \dots, f_{2k}\}$ , em que  $f_i = \{i, k + 1\}$  e  $f_{k+i} = \{i, k + 2\}$ , para todo  $1 \leq i \leq k$ . Representaremos esse grafo através do diagrama da Figura 2.1. Pelo Teorema 2.6, a primeira entrada da matriz  $St_{2k}(f_1, f_2, \dots, f_{2k})$  é igual a  $\sum \text{sgn}(w)$ , onde  $w$  percorre todos os caminhos eulerianos de  $G(S)$  que ligam o vértice 1 ao vértice 1. Portanto, a seguir determinaremos todos esses caminhos.

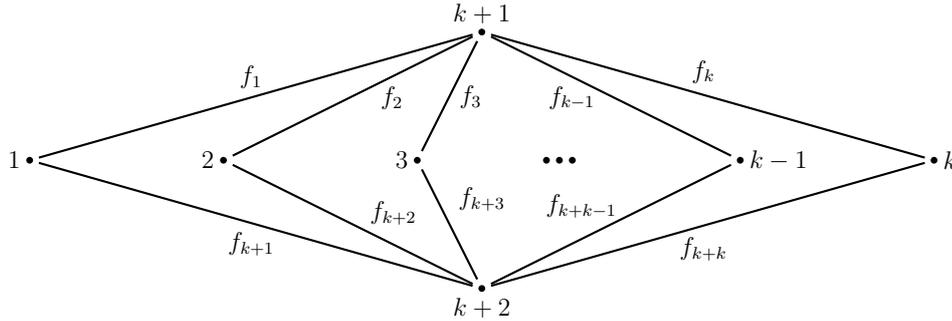


Figura 2.1: Grafo diamante.

Um caminho que inicia no vértice 1 pode percorrer inicialmente a aresta  $f_1$  ou a aresta  $f_{k+1}$ . Suponha então que seja percorrida a aresta  $f_1$  até o vértice  $k + 1$ . A única opção para o próximo passo é ir do vértice  $k + 1$  ao vértice  $k + 2$ . Para isso, escolhemos um ramo qualquer  $f_{i_1} f_{k+i_1}$  para percorrer. Uma vez percorrido esse ramo, a única opção para o próximo passo é ir do vértice  $k + 2$  ao vértice  $k + 1$  percorrendo um ramo no sentido oposto, isto é,  $f_{k+i_2} f_{i_2}$ . Repetiremos esse raciocínio até que sejam percorridos todos os ramos  $f_{i_s} f_{k+i_s}$ . Como a quantidade de ramos  $f_{i_s} f_{k+i_s}$  é ímpar, o último ramo necessariamente será percorrido na ordem  $f_{i_{k-1}} f_{k+i_{k-1}}$ . Assim, o caminho euleriano será completado percorrendo por último a aresta  $f_{k+1}$ . Por uma simetria óbvia são construídos todos caminhos eulerianos a partir do vértice 1 percorrendo inicialmente  $f_{k+1}$  e por último, a aresta  $f_1$ . Desse modo, os caminhos eulerianos iniciando e terminando no vértice 1 no grafo  $G(S)$  são dados por

$$f_1 f_{\sigma(2)} f_{k+\sigma(2)} f_{k+\sigma(3)} f_{\sigma(3)} \dots f_{\sigma(k)} f_{k+\sigma(k)} f_{k+1} \text{ e}$$

$$f_{k+1} f_{k+\sigma(2)} f_{\sigma(2)} f_{\sigma(3)} f_{k+\sigma(3)} \dots f_{k+\sigma(k)} f_{\sigma(k)} f_1,$$

onde  $\sigma$  é uma permutação de  $\{2, 3, \dots, k\}$ .

Agora, o sinal desses caminhos pode ser obtido computando-se quantas transposições de arestas são necessárias para obtermos a sequência ordenada de arestas a qual corresponde a identidade, isto é, a sequência  $f_1 f_2 \dots f_{2k}$  (entretanto, tomaremos a liberdade de não computar as transposições realizadas por duas arestas consecutivas, uma vez que o

total de tais transposições é sempre par, logo em nada afetará o sinal de um caminho). Desse modo,

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{sgn}(f_1 f_{\sigma(2)} f_{k+\sigma(2)} f_{k+\sigma(3)} \underbrace{f_{\sigma(3)} f_{\sigma(4)}} f_{k+\sigma(4)} \cdots f_{k+\sigma(k-1)} \underbrace{f_{\sigma(k-1)} f_{\sigma(k)}} f_{k+\sigma(k)} f_{k+1}) \\
 &= \operatorname{sgn}(f_1 f_{\sigma(2)} f_{\sigma(3)} f_{\sigma(4)} \cdots f_{\sigma(k-1)} f_{\sigma(k)} f_{k+\sigma(2)} f_{k+\sigma(3)} \cdots f_{k+\sigma(k-1)} f_{k+\sigma(k)} \underbrace{f_{k+1}}) \\
 &= (-1)^{k-1} \operatorname{sgn}(f_1 f_{\sigma(2)} f_{\sigma(3)} \cdots f_{\sigma(k)} f_{k+1} f_{k+\sigma(2)} f_{k+\sigma(3)} \cdots f_{k+\sigma(k-1)} f_{k+\sigma(k)}) \\
 &= -\operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(f_1 f_2 f_3 \cdots f_k f_{k+1} f_{k+2} f_{k+3} \cdots f_{k+k-1} f_{k+k}) = -1
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{sgn}(f_{k+1} f_{k+\sigma(2)} \underbrace{f_{\sigma(2)} f_{\sigma(3)}} f_{k+\sigma(3)} f_{k+\sigma(4)} \cdots f_{k+\sigma(k-1)} f_{k+\sigma(k)} \underbrace{f_{\sigma(k)} f_1}) \\
 &= \operatorname{sgn}(\underbrace{f_{k+1}} f_{\sigma(2)} f_{\sigma(3)} \cdots f_{\sigma(k-1)} f_{\sigma(k)} \underbrace{f_1} f_{k+\sigma(2)} f_{k+\sigma(3)} \cdots f_{k+\sigma(k-1)} f_{k+\sigma(k)}) \\
 &= (-1) \operatorname{sgn}(f_1 f_{\sigma(2)} f_{\sigma(3)} \cdots f_{\sigma(k)} f_{k+1} f_{k+\sigma(2)} f_{k+\sigma(3)} \cdots f_{k+\sigma(k-1)} f_{k+\sigma(k)}) \\
 &= -\operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(f_1 f_2 f_3 \cdots f_k f_{k+1} f_{k+2} f_{k+3} \cdots f_{k+k-1} f_{k+k}) = -1.
 \end{aligned}$$

Ressaltamos que as igualdades de sinais acima devem ser entendidas apenas como o sinal da permutação, uma vez que as transposições nas arestas em cada passo não necessariamente resultam em um caminho, portanto essa notação de sinal utilizada não tem o mesmo sentido que o sinal de um caminho<sup>4</sup>.

Concluimos que os sinais de todos esses caminhos são iguais (pois, como vimos as igualdades acima independem das permutações  $\sigma$ ). Além do mais, todos os  $2(k-1)!$  caminhos eulerianos de 1 a 1 em  $G(S)$  são negativos. Desse modo,

$$e_{11} St_{2k}(f_1, f_2, \dots, f_{2k}) e_{11} = -2(k-1)! e_{11}.$$

No caso em que  $k$  é ímpar, novamente consideraremos a substituição  $S = \{f_1, \dots, f_{2k}\}$  e o grafo associado a substituição  $S$ , isto é, o mesmo grafo definido acima. Entretanto, observe que nesse caso  $\partial(k+1) = \partial(k+2) = k$  é ímpar e que todos os outros vértices têm grau par<sup>5</sup>. Portanto, os caminhos eulerianos existentes no grafo ligam o vértice  $k+1$  ao vértice  $k+2$  ou o contrário<sup>6</sup>. Agora, pelo Teorema 2.6, temos que a entrada  $(k+1, k+2)$  da matriz  $St_{2k}(f_1, \dots, f_{2k})$  é igual a  $\sum \operatorname{sgn}(w)$ , em que  $w$  percorre todos os caminhos eulerianos de  $G(S)$  que ligam o vértice  $k+1$  ao vértice  $k+2$ . Portanto, estaremos interessados em obter o sinal desses caminhos. Apresentando argumentos semelhantes aos utilizados no caso anterior, os caminhos eulerianos de  $k+1$  a  $k+2$  são

<sup>4</sup>Ver a Definição A.12 do sinal de um caminho euleriano.

<sup>5</sup>Para definição do grau de um vértice ver a Seção A.1 do apêndice.

<sup>6</sup>Ver Teorema A.10.

dados por

$$f_{\sigma(1)}f_{k+\sigma(1)}f_{k+\sigma(2)}f_{\sigma(2)}f_{\sigma(3)}f_{k+\sigma(3)}f_{k+\sigma(4)}f_{\sigma(4)} \cdots f_{k+\sigma(k-1)}f_{\sigma(k-1)}f_{\sigma(k)}f_{k+\sigma(k)},$$

onde  $\sigma \in S_k$ .

Em seguida, para obtermos o sinal desses caminhos vemos que

$$\begin{aligned} & \text{sgn}(f_{\sigma(1)}f_{k+\sigma(1)}f_{k+\sigma(2)} \underbrace{f_{\sigma(2)}f_{\sigma(3)}f_{k+\sigma(3)}f_{k+\sigma(4)}}_{\text{caminho}} \underbrace{f_{\sigma(4)}f_{\sigma(5)} \cdots f_{k+\sigma(k-1)}}_{\text{caminho}} \underbrace{f_{\sigma(k-1)}f_{\sigma(k)}f_{k+\sigma(k)}}_{\text{caminho}}) \\ &= \text{sgn}(f_{\sigma(1)}f_{\sigma(2)}f_{\sigma(3)} \cdots f_{\sigma(k-1)}f_{\sigma(k)}f_{k+\sigma(1)}f_{k+\sigma(2)}f_{k+\sigma(3)} \cdots f_{k+\sigma(k-1)}f_{k+\sigma(k)}) \\ &= \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(f_1f_2f_3 \cdots f_kf_{k+1}f_{k+2} \cdots f_{k+k-1}f_{k+k}) = 1. \end{aligned}$$

Desse modo, os sinais desses  $k!$  caminhos são iguais (pois, novamente as igualdades independem das permutações  $\sigma$ ) e esses sinais são positivos. Sendo assim,  $e_{k+1,k+1}St_{2k}(f_1, \dots, f_{2k})e_{k+2,k+2} = k! e_{k+1,k+2}$ . ■

Como consequência direta do lema acima e do fato do polinômio standard ser alternado podemos estabelecer o seguinte teorema.

**Teorema 2.10.** *O grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis simétricas ímpares de  $(M_{k,2}(F), t)$  é igual a  $2k + 1$ , para todo  $k \geq 2$ .*

Finalmente, com respeito ao caso em que  $k = 3$  e  $l = 3$ , vamos mostrar que o grau mínimo não é dado pela cota superior  $kl + 1$ , mas que na realidade o grau mínimo nesse caso é igual a 7.

**Teorema 2.11.** *O grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis simétricas ímpares de  $(M_{3,3}(F), t)$  é igual a 7.*

**Demonstração.** Recordemos que

$$\begin{aligned} (M_{3,3}(F), t)_1^+ &= \text{span}_F\{e_{14} + e_{41}, e_{24} + e_{42}, e_{34} + e_{43}, e_{15} + e_{51}, e_{25} + e_{52}, e_{35} + e_{53}, \\ &\quad e_{16} + e_{61}, e_{26} + e_{62}, e_{36} + e_{63}\}. \end{aligned}$$

Agora, pela Proposição 1.2, a fim de mostrarmos que  $St_7(y_{1,1}, \dots, y_{7,1}) \equiv 0$  em  $(M_{3,3}(F), t)$ , basta mostrarmos que  $St_7(y_{1,1}, \dots, y_{7,1})$  se anula para quaisquer substituições de elementos distintos da base de  $(M_{3,3}(F), t)_1^+$ . Em vista disso, denotaremos os elementos da base por

$$\alpha_i = e_{i4} + e_{4i} \quad \beta_i = e_{i5} + e_{5i} \quad \gamma_i = e_{i6} + e_{6i}, \quad \text{onde } i = 1, 2, 3.$$

Assim, temos as seguintes possibilidades para substituições de elementos distintos de  $(M_{3,3}(F), t)_1^+$  em  $St_7(y_{1,1}, \dots, y_{7,1})$  :

$$\begin{aligned} S_1^{(i)} &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_i\}, & \text{onde } 1 \leq i \leq 3; \\ S_2^{(i)} &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \beta_i\}, & \text{onde } 1 \leq i \leq 3; \\ S_3^{(i)} &= \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \alpha_i\}, & \text{onde } 1 \leq i \leq 3; \\ S_4^{(l,k,i,j)} &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_l, \beta_k, \gamma_i, \gamma_j\}, & \text{onde } 1 \leq l < k \leq 3 \text{ e } 1 \leq i < j \leq 3; \\ S_5^{(l,k,i,j)} &= \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_l, \alpha_k, \gamma_i, \gamma_j\}, & \text{onde } 1 \leq l < k \leq 3 \text{ e } 1 \leq i < j \leq 3; \\ S_6^{(l,k,i,j)} &= \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \alpha_l, \alpha_k, \beta_i, \beta_j\}, & \text{onde } 1 \leq l < k \leq 3 \text{ e } 1 \leq i < j \leq 3. \end{aligned}$$

Tendo em mente ao longo desta demonstração o Teorema 2.6, nos concentraremos em provar que os grafos associados às substituições acima são todos canceladores. De fato, isso é óbvio para os grafos  $G(S_r^{(i)})$ , em que  $1 \leq i \leq 3$  e  $1 \leq r \leq 3$ , pois nesses grafos os vértices 4, 5 e 6 têm grau ímpar e portanto<sup>7</sup> não existem caminhos eulerianos nesses grafos. Desse modo, podemos concluir que  $St_7(y_{1,1}, \dots, y_{7,1})$  se anula para todas as substituições  $S_r^{(i)}$ , onde  $1 \leq i \leq 3$  e  $1 \leq r \leq 3$ . Assim, nos resta avaliar as substituições dos tipos  $S_r^{(l,k,i,j)}$ , onde  $1 \leq l < k \leq 3$ ;  $1 \leq i < j \leq 3$  e  $4 \leq r \leq 6$ . Note que existem apenas 3 valores para serem assumidos por  $l, k, i$  e  $j$ . Dessa forma, podem ocorrer três situações:  $\{l, k\} \cap \{i, j\} = \{l, k\}$  ou  $\{l, k\} \cap \{i, j\} = \{l\}$  ou  $\{l, k\} \cap \{i, j\} = \{k\}$ .

No primeiro caso, em que  $l = i$  e  $k = j$ , temos no grafo conexo associado a substituição  $S_r^{(l,k,i,j)}$  (que representamos a seguir na Figura 2.2 assumindo sem perda de generalidade que  $r = 4$ , isto é, ilustramos o grafo associado a quarta substituição) três vértices de grau ímpar, a saber,  $\partial(4) = \partial(i) = \partial(j) = 3$ . Desse modo<sup>8</sup>, não existem caminhos eulerianos nesse grafo. Portanto, os grafos associados as substituições  $S_r^{(l,k,i,j)}$ , em que  $l = i$  e  $k = j$ , são todos canceladores.

No segundo caso, em que  $l$  é igual a  $i$  ou  $j$  e  $k$  é diferente de  $i$  e de  $j$ , vamos, sem perda de generalidade, assumir que  $l = i$ . Assim, para ilustrar o grafo conexo associado a substituição  $S_r^{(l,k,i,j)}$  temos o seguinte diagrama dado na Figura 2.3 (novamente sem perda de generalidade assumiremos que  $r = 4$ , isto é, trabalharemos com o grafo associado a quarta substituição).

Observe que nesse caso  $\partial(4) = \partial(i) = 3$  e que os graus de todos os outros vértices são iguais a 2. Logo,<sup>9</sup> no grafo temos apenas caminhos eulerianos que ligam o vértice  $i$  ao vértice 4 e caminhos eulerianos que ligam o vértice 4 ao vértice  $i$ . Pela Proposição

<sup>7</sup>Ver Observação A.11.

<sup>8</sup>Ver Observação A.11.

<sup>9</sup>Ver Teorema A.10.

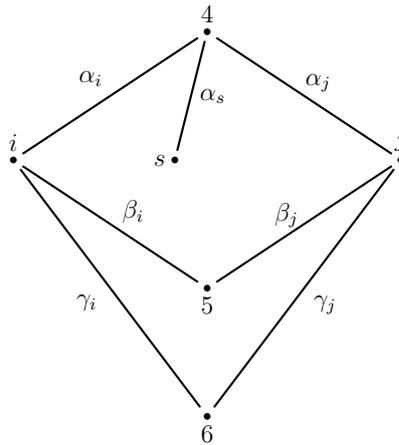


Figura 2.2: Grafo associado a substituição  $S_r^{(l,k,i,j)}$ , onde  $l = i, k = j; r = 4, s \neq i, s \neq j$ .

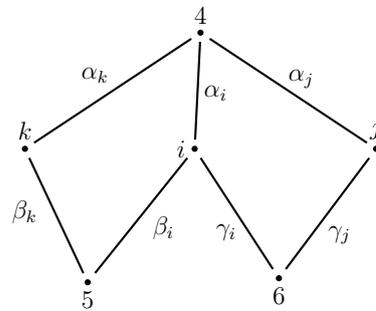


Figura 2.3: Grafo associado a substituição  $S_r^{(l,k,i,j)}$ , onde  $l = i; k \neq i; k \neq j$  e  $r = 4$ .

A.21, para mostrarmos que esse grafo é cancelador, é suficiente mostrarmos que o vértice 4 é cancelador. Para isso, a fim de obtermos os caminhos eulerianos de 4 a  $i$  e os seus respectivos sinais, renomearemos as arestas da seguinte maneira:

$$f_1 = \alpha_k, f_2 = \alpha_i, f_3 = \alpha_j, f_4 = \beta_k, f_5 = \beta_i, f_6 = \gamma_i, f_7 = \gamma_j.$$

Desse modo, o diagrama fornecido acima torna-se o diagrama da Figura 2.4. Posto isso,

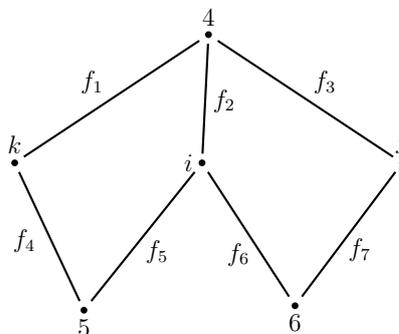


Figura 2.4: Grafo com troca de rotulação associado a uma substituição  $S_r^{(l,k,i,j)}$ .

podemos obter sem dificuldade que os caminhos eulerianos de 4 a  $i$  são dados por

$$f_1f_4f_5f_2f_3f_7f_6; \quad f_1f_4f_5f_6f_7f_3f_2; \quad f_2f_5f_4f_1f_3f_7f_6; \quad f_2f_6f_7f_3f_1f_4f_5;$$

$$f_3f_7f_6f_2f_1f_4f_5; \quad f_3f_7f_6f_5f_4f_1f_2;$$

e que os sinais desses caminhos são

$$\begin{aligned} \text{sgn}(f_1f_4f_5f_2f_3f_7f_6) &= \text{sgn}((24)(35)(67)) = -1 \\ \text{sgn}(f_1f_4f_5f_6f_7f_3f_2) &= \text{sgn}((246357)) = -1 \\ \text{sgn}(f_2f_5f_4f_1f_3f_7f_6) &= \text{sgn}((12534)(67)) = -1 \\ \text{sgn}(f_2f_6f_7f_3f_1f_4f_5) &= \text{sgn}((1264375)) = 1 \\ \text{sgn}(f_3f_7f_6f_2f_1f_4f_5) &= \text{sgn}((1364275)) = 1 \\ \text{sgn}(f_3f_7f_6f_5f_4f_1f_2) &= \text{sgn}((136)(27)(45)) = 1. \end{aligned}$$

Desse modo, obtemos que o número de caminhos eulerianos positivos de 4 a  $i$  é igual ao número de caminhos eulerianos negativos e, conseqüentemente, esse grafo é cancelador. Dessa maneira, concluímos que os grafos associados as substituições  $S_r^{(l,k,i,j)}$ , em que  $l$  é igual a  $i$  ou  $j$  e  $k$  é diferente de  $i$  e de  $j$ , são todos canceladores.

Por fim, no terceiro caso, em que  $k$  é igual a  $i$  ou  $j$  e  $l$  é diferente de  $i$  e de  $j$ , podemos sem perda de generalidade assumir que  $k = i$ . Portanto, para ilustrar o grafo conexo associado a substituição  $S_r^{(l,k,i,j)}$  temos o diagrama da Figura 2.5 (onde novamente assumiremos sem perda de generalidade que  $r = 4$ ).

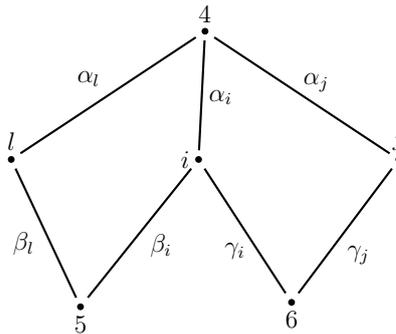


Figura 2.5: Grafo associado a substituição  $S_r^{(l,k,i,j)}$ , onde  $k = i$ ;  $l \neq i$ ;  $l \neq j$  e  $r = 4$ .

Agora, a correspondência biunívoca  $g$  entre os conjuntos de vértices do grafo do segundo caso e o conjunto de vértices do grafo acima, definida por

$$g(x) = \begin{cases} l, & \text{se } x = k \\ x, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

preserva as adjacências das arestas. Portanto, o grafo acima é isomorfo<sup>10</sup> ao grafo considerado no segundo caso. Como vimos que o grafo considerado no segundo caso é cancelador, temos que o grafo acima também é cancelador<sup>11</sup>. Portanto, podemos concluir que os grafos associados às substituições  $S_r^{(l,k,i,j)}$ , em que  $k$  é igual a  $i$  ou  $j$  e  $l$  é diferente de  $i$  e de  $j$ , são todos canceladores.

Em razão do que foi visto no primeiro, segundo e terceiro caso concluímos que todos os grafos associados às substituições de elementos distintos da base de  $(M_{3,3}(F), t)_1^+$ , descritas anteriormente, são todos canceladores. Logo, pelo Teorema 2.6,  $St_7(y_{1,1}, \dots, y_{7,1})$  se anula sob quaisquer substituições de elementos distintos da base de  $(M_{3,3}(F), t)_1^+$ .

Finalmente, pelo Lema 2.9, temos que  $e_{44}St_6(f_1, f_2, \dots, f_6)e_{55} = 3! e_{45} \neq 0$ , em que  $f_1 = e_{14} + e_{41}$ ,  $f_2 = e_{24} + e_{42}$ ,  $f_3 = e_{34} + e_{43}$ ,  $f_4 = e_{15} + e_{51}$ ,  $f_5 = e_{25} + e_{52}$  e  $f_6 = e_{35} + e_{53}$ . Assim sendo, obtemos que  $mdeg(m(St)_1^+) = 7$ . ■

Com o teorema anterior encerramos nossa análise dos casos em que  $kl + 1 \leq 2k + 2l - 2$ . Agora estaremos interessados em analisar o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis ímpares simétricas de  $(M_{k,l}(F), t)$  nos casos em que  $2k + 2l - 2 < kl + 1$ , ou de modo equivalente, nos casos em que  $l \geq 3$  e  $k \geq 4$ . Nesse sentido, os próximos teoremas nos fornecerão cotas inferiores para  $mdeg((St)_1^+)$ , para todo  $k \geq l$ ,  $l \geq 3$  e  $k \geq 4$ .

**Teorema 2.12.** *Se  $St_r(y_{1,1}, \dots, y_{r,1}) \equiv 0$  em  $(M_{k,l}(F), t)$ , onde  $k \geq l$ ,  $k \geq 4$  e  $l \geq 3$  são números naturais ímpares, então  $r \geq 2k + 2l - 5$ .*

Para demonstrarmos o teorema acima, pela Proposição 1.2, basta exibirmos uma substituição de  $2k + 2l - 6$  matrizes simétricas elementares pertencentes ao subespaço  $(M_{k,l}(F), t)_1^+$  que não anula o polinômio standard deste grau. Portanto, consideraremos a substituição  $S_{(k,l)} = \{f_1, f_2, \dots, f_{2k+2l-6}\}$ , onde

- $f_i = e_{i,k+1} + e_{k+1,i}$  e  $f_{k-1+i} = e_{i,k+2} + e_{k+2,i}$ , para  $1 \leq i \leq k - 1$ ;
- $f_{2i-7} = e_{1i} + e_{i1}$  e  $f_{2i-6} = e_{ki} + e_{ik}$ , para  $k + 3 \leq i \leq k + l$ .

Em seguida, tomaremos o grafo conexo associado a essa substituição (cuja representação pode ser vista na Figura 2.6)  $G(S_{(k,l)}) = (V(G), E(G))$ , onde  $V(G) = \{1, \dots, k + l\}$  e  $E(G) = \{f_1, \dots, f_{2k+2l-6}\}$ , com

- $f_i = \{i, k + 1\}$  e  $f_{k-1+i} = \{i, k + 2\}$ , para todo  $1 \leq i \leq k - 1$ ;

---

<sup>10</sup>Ver Definição A.16 de grafos isomorfos no apêndice.

<sup>11</sup>Ver Lema A.17.

- $f_{2i-7} = \{1, i\}$  e  $f_{2i-6} = \{i, k\}$ , para todo  $k + 3 \leq i \leq k + l$ .

Agora, usando o Teorema 2.6, mostraremos que o polinômio standard não se anula sob a substituição  $S_{(k,l)}$  ao demonstrarmos o teorema abaixo que estabelece que o grafo  $G(S_{(k,l)})$  associado a substituição  $S_{(k,l)}$  é não cancelador.

**Teorema 2.13.** *O grafo  $G(S_{(k,l)}) = (V(G), E(G))$  é não cancelador, para todo  $k \geq 3$  e  $l \geq 3$  ímpares.*

**Demonstração.** Note que no grafo  $G(S_{(k,l)})$  (representado na Figura 2.6), temos que  $\partial(k + 1) = \partial(k + 2) = k - 1$  é par;  $\partial(1) = l$  é ímpar;  $\partial(k) = l - 2$  é ímpar e que os graus de todos os outros vértices do grafo  $G(S_{(k,l)})$  são todos iguais a 2. Assim<sup>12</sup>, o grafo  $G(S_{(k,l)})$  tem caminhos eulerianos e esses caminhos ligam o vértice 1 ao vértice  $k$ , ou ligam o vértice  $k$  ao vértice 1.

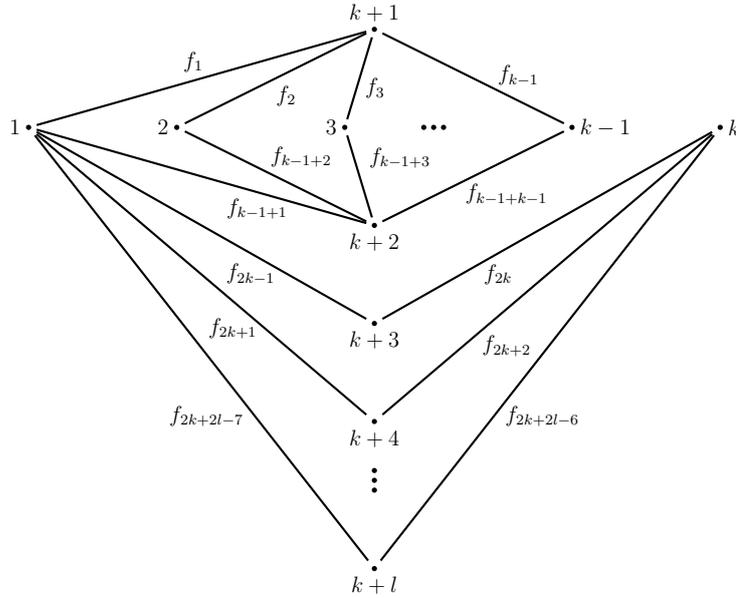


Figura 2.6: Grafo  $G(S_{(k,l)})$ .

Portanto, inicialmente estaremos interessados em determinar o número de caminhos eulerianos que ligam o vértice  $k$  ao vértice 1.

Nesse sentido, denotaremos por  $C_i = f_{2k+2i-2}f_{2k+2i-3}$ , onde  $1 \leq i \leq l - 2$ , os caminhos de  $G(S_{(k,l)})$  de tamanho 2 que ligam o vértice  $k$  ao vértice 1 e por  $C_i^{-1} = f_{2k+2i-3}f_{2k+2i-2}$  o inverso desses caminhos, que claramente ligam o vértice 1 ao vértice  $k$ .

Desse modo, podemos observar que todos os caminhos eulerianos que ligam o vértice  $k$  ao vértice 1 pertencem a um dos seguintes conjuntos de caminhos

$$M_{(j)}^{(2k-2)} = C_{\sigma(1)} C_{\sigma(2)}^{-1} C_{\sigma(3)} C_{\sigma(4)}^{-1} \cdots C_{\sigma(j)} d_{(1,1)}^{(2k-2)} C_{\sigma(j+1)}^{-1} \cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1} C_{\sigma(l-2)},$$

<sup>12</sup>Ver Teorema A.10.

onde  $\sigma \in S_{l-2}$  permuta os subíndices dos caminhos  $C's$  e  $C^{-1}'s$ ,  $j \in \{1, 3, \dots, l-2\}$  e  $d_{(1,1)}^{(2k-2)}$  é um caminho euleriano de tamanho  $2k-2$  que liga o vértice 1 a 1 no subgrafo diamante conexo  $D_{2k-2}^{k+1,k+2} = (V(D), E(D))$ , onde  $V(D) = \{1, \dots, k+2\}$  e  $E(D) = \{f_1, \dots, f_{2k-2}\}$ .

Agora, note que os caminhos  $d_{(1,1)}^{(2k-2)}$  podem ser descritos como

$$f_1 f_{\tau(2)} f_{k-1+\tau(2)} f_{k-1+\tau(3)} f_{\tau(3)} f_{\tau(4)} f_{k-1+\tau(4)} \cdots f_{\tau(k-1)} f_{k-1+\tau(k-1)} f_k, \text{ ou}$$

$$f_k f_{k-1+\tau(2)} f_{\tau(2)} f_{\tau(3)} f_{k-1+\tau(3)} f_{k-1+\tau(4)} f_{\tau(4)} \cdots f_{k-1+\tau(k-1)} f_{\tau(k-1)} f_1,$$

em que  $\tau$  é uma permutação dos elementos do conjunto  $\{2, \dots, k-1\}$ .

Desse forma, observando que  $j \in \{1, 3, \dots, l-2\}$ , temos  $\frac{l-1}{2}$  possibilidades de posicionamento para os caminhos  $d_{(1,1)}^{(2k-2)}$  entre os caminhos  $C's$  e  $C^{-1}'s$ , ou seja, temos  $\frac{l-1}{2}$  conjuntos distintos  $M_{(j)}^{(2k-2)}$  de caminhos. Ademais, temos  $(l-2)!$  permutações distintas para os subíndices dos caminhos  $C's$  e  $C^{-1}'s$  em um conjunto  $M_{(j)}^{(2k-2)}$  e, por fim, através da observação dos caminhos acima podemos calcular que temos  $2(k-2)!$  caminhos distintos  $d_{(1,1)}^{(2k-2)}$  no subgrafo diamante  $D_{(2k-2)}^{(k+1,k+2)}$ . Com isso obtemos que o número de caminhos eulerianos ligando o vértice  $k$  ao vértice 1 em  $G(S_{(k,l)})$  é igual a

$$\left(\frac{l-1}{2}\right) 2(k-2)!(l-2)! .$$

Nosso próximo passo será mostrar que todos esses caminhos eulerianos têm o mesmo sinal. Portanto, inicialmente iremos obter o sinal dos caminhos em um mesmo conjunto  $M_{(j)}^{(2k-2)}$ . Para isso, recordemos que, pelo o que foi visto acima, qualquer caminho em  $M_{(j)}^{(2k-2)}$  é de uma das seguintes formas:

$$(2.1) \quad C_{\sigma(1)} C_{\sigma(2)}^{-1} \cdots C_{\sigma(j)} f_1 f_{\tau(2)} f_{k-1+\tau(2)} f_{k-1+\tau(3)} f_{\tau(3)} \cdots f_{\tau(k-1)} f_{k-1+\tau(k-1)} f_k C_{\sigma(j+1)}^{-1} \cdots C_{\sigma(l-2)},$$

ou

$$(2.2) \quad C_{\sigma(1)} C_{\sigma(2)}^{-1} \cdots C_{\sigma(j)} f_k f_{k-1+\tau(2)} f_{\tau(2)} f_{\tau(3)} f_{k-1+\tau(3)} \cdots f_{k-1+\tau(k-1)} f_{\tau(k-1)} f_1 C_{\sigma(j+1)}^{-1} \cdots C_{\sigma(l-2)}.$$

Em vista disso, vamos a seguir computar o sinal dos caminhos da forma (2.1) (aqui tomaremos a liberdade de não computar as transposições realizadas por um par de arestas consecutivas, uma vez que o total de transposições realizadas por esse par será sempre par e portanto em nada afetará o sinal do caminho).

$$\begin{aligned} & \text{sgn}(C_{\sigma(1)} C_{\sigma(2)}^{-1} \cdots C_{\sigma(j)} f_1 f_{\tau(2)} f_{k-1+\tau(2)} f_{k-1+\tau(3)} f_{\tau(3)} f_{\tau(4)} \cdots f_{\tau(k-2)} f_{\tau(k-1)} f_{k-1+\tau(k-1)} f_k \\ & \quad C_{\sigma(j+1)}^{-1} \cdots C_{\sigma(l-2)}) \\ &= (-1)^{\frac{l-1}{2}} \text{sgn}(f_1 f_{\tau(2)} f_{k-1+\tau(2)} f_{k-1+\tau(3)} f_{\tau(3)} f_{\tau(4)} \cdots f_{\tau(k-2)} f_{\tau(k-1)} f_{k-1+\tau(k-1)} f_k C_1^{-1} C_2^{-1} \cdots \\ & \quad C_j^{-1} C_{j+1}^{-1} \cdots C_{l-2}^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{\frac{l-1}{2}} \operatorname{sgn}(f_1 f_{\tau(2)} f_{\tau(3)} f_{\tau(4)} \cdots f_{\tau(k-2)} f_{\tau(k-1)} f_{k-1+\tau(2)} f_{k-1+\tau(3)} \cdots f_{k-1+\tau(k-1)} f_k f_{2k-1} f_{2k} \\
&\quad f_{2k+1} f_{2k+2} \cdots f_{2k+2l-7} f_{2k+2l-6}) \\
&= (-1)^{\frac{l-1}{2}} (-1)^{k-2} \operatorname{sgn}(f_1 f_{\tau(2)} f_{\tau(3)} \cdots f_{\tau(k-1)} f_k f_{k-1+\tau(2)} f_{k-1+\tau(3)} \cdots f_{k-1+\tau(k-1)} f_{2k-1} f_{2k} \\
&\quad f_{2k+1} f_{2k+2} \cdots f_{2k+2l-7} f_{2k+2l-6}) \\
&= (-1)^{\frac{l-1}{2}} (-1)^{k-2} (\operatorname{sgn}(\tau))^2 \operatorname{sgn}(f_1 f_2 f_3 \cdots f_{k-1} f_k f_{k-1+2} f_{k-1+3} \cdots f_{k-1+k-1} f_{2k-1} f_{2k} \\
&\quad f_{2k+1} f_{2k+2} \cdots f_{2k+2l-7} f_{2k+2l-6}) \\
&= (-1)^{\frac{l-1}{2}} (-1)^{k-2} \operatorname{sgn}(f_1 f_2 f_3 \cdots f_{k-1} f_k f_{k+1} \cdots f_{2k-1} f_{2k} \cdots f_{2k+2l-7} f_{2k+2l-6}) \\
&= (-1)^{\frac{l-1}{2}} (-1)^{k-2} = (-1)^{\frac{l+1}{2}},
\end{aligned}$$

onde a última igualdade ocorre devido ao fato de  $k$  ser ímpar. Agora, pelas igualdades acima podemos observar que o sinal final independe da permutação  $\tau$ , logo todos os caminhos eulerianos da forma (2.1) têm o mesmo sinal  $(-1)^{\frac{l+1}{2}}$ .

Em sequência, para obter o sinal dos caminhos eulerianos da forma (2.2) em  $M_{(j)}^{(2k-2)}$  procederemos de forma análoga ao caso anterior através das seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sgn}(C_{\sigma(1)} C_{\sigma(2)}^{-1} \cdots C_{\sigma(j)} f_k f_{k-1+\tau(2)} f_{\tau(3)} f_{\tau(3)} f_{k-1+\tau(3)} \cdots f_{k-1+\tau(k-1)} f_{\tau(k-1)} f_1 \\
&\quad C_{\sigma(j+1)}^{-1} \cdots C_{\sigma(l-2)}) \\
&= (-1)^{\frac{l+1}{2}} \operatorname{sgn}(f_1 f_2 f_3 \cdots f_{k-1} f_k f_{k-1+2} f_{k-1+3} \cdots f_{k-1+k-1} f_{2k-1} f_{2k} f_{2k+1} \cdots f_{2k+2l-6}) \\
&= (-1)^{\frac{l+1}{2}}.
\end{aligned}$$

Dessa maneira, pelas igualdades acima podemos novamente observar que o sinal final independe da permutação  $\tau$ , logo todos os caminhos eulerianos da forma (2.2) têm o mesmo sinal  $(-1)^{\frac{l+1}{2}}$ .

Assim, concluímos que os sinais dos caminhos eulerianos da forma (2.2) em  $M_{(j)}^{(2k-2)}$  são iguais aos sinais dos caminhos eulerianos da forma (2.1), portanto todos os caminhos em  $M_{(j)}^{(2k-2)}$  têm o mesmo sinal. Além disso, usando o fato de que as transposições de caminhos  $C$ 's e  $C^{-1}$ 's não alteram o sinal de um caminho, podemos concluir que os sinais de todos os caminhos em um outro conjunto qualquer  $M_{(h)}^{(2k-2)}$  também são iguais a  $(-1)^{\frac{l+1}{2}}$ . Portanto, obtemos que todos os caminhos eulerianos que ligam o vértice  $k$  ao vértice 1 no grafo  $G$  têm o mesmo sinal. Além disso, todos eles serão negativos se,  $l \equiv 1 \pmod{4}$  e serão positivos se,  $l \equiv 3 \pmod{4}$ . Portanto, concluímos que o grafo  $G(S_{(k,l)})$  é não cancelador. ■

Em conclusão, como consequência do que foi discutido anteriormente e dos Teoremas 2.6 e 2.13 obtemos o Teorema 2.12. Nessa situação, já estabelecemos uma cota inferior

para  $mdeg((St)_1^+)$  nos casos em que  $k \geq l$ ,  $k \geq 4$  e  $l \geq 3$  são ambos ímpares. O teorema a seguir nos fornecerá uma cota inferior para  $mdeg((St)_1^+)$  nos casos em que  $k \geq l$ ,  $k \geq 4$  é par e  $l \geq 3$  é um número natural qualquer.

**Teorema 2.14.** *Se  $St_r(y_{1,1}, \dots, y_{r,1}) \equiv 0$  em  $(M_{k,l}(F), t)$ , onde  $k \geq l$ ,  $k \geq 4$  é par e  $l \geq 3$ , então  $r \geq 2k + 2l - 3$ .*

Novamente para demonstrarmos o teorema acima, pela Proposição 1.2, basta exibirmos uma substituição de  $2k + 2l - 4$  matrizes simétricas elementares pertencentes ao subespaço  $(M_{k,l}(F), t)_1^+$  que não anula o polinômio standard deste grau. Assim, consideraremos a substituição  $S'_{(k,l)} = \{f_1, \dots, f_{2k+2l-4}\}$ , onde

- $f_i = e_{i,k+1} + e_{k+1,i}$  e  $f_{k+i} = e_{i,k+2} + e_{k+2,i}$ , para  $1 \leq i \leq k$ ;
- $f_{2i-5} = e_{1i} + e_{i1}$ , e  $f_{2i-4} = e_{ki} + e_{ik}$ , para  $k + 3 \leq i \leq k + l$ .

Em sequência, tomaremos o grafo conexo (que está representado na Figura 2.7) associado a substituição acima:  $H(S'_{(k,l)}) = (V(H), E(H))$ , onde  $V(H) = \{1, \dots, k, k + 1, \dots, k + l\}$  e  $E(H) = \{f_1, \dots, f_{2k+2l-4}\}$ , em que

- $f_i = \{i, k + 1\}$  e  $f_{k+i} = \{i, k + 2\}$ , para todo  $1 \leq i \leq k$ ;
- $f_{2i-5} = \{1, i\}$  e  $f_{2i-4} = \{i, k\}$ , para todo  $k + 3 \leq i \leq k + l$ ;

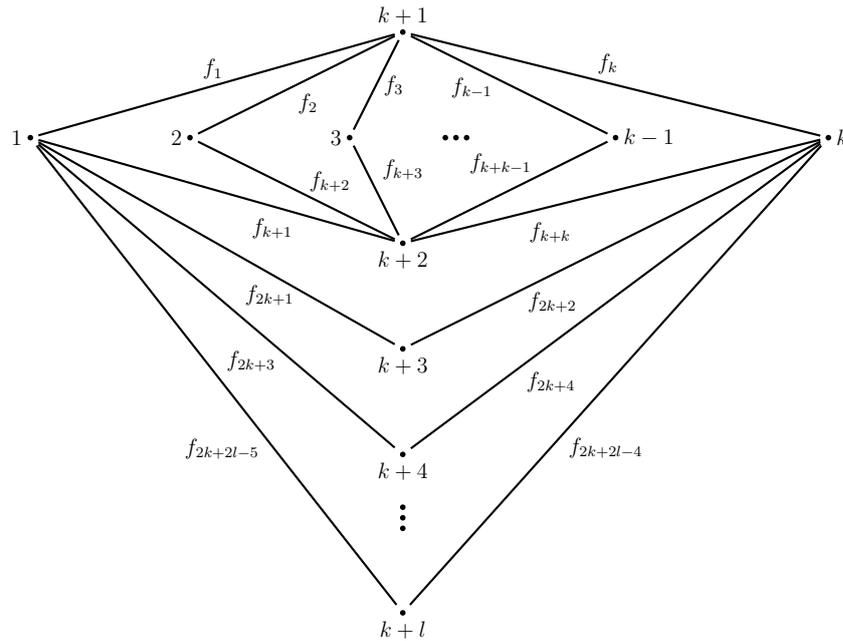


Figura 2.7: Grafo  $H(S'_{(k,l)})$ .

Dessa forma, pelo Teorema 2.6, para mostrarmos que o polinômio standard não se anula sob a substituição  $S'_{(k,l)}$  temos que garantir que o grafo  $H(S'_{(k,l)})$  associado a substituição  $S'_{(k,l)}$  é não cancelador, ou seja, para mostrarmos que o polinômio standard não se anula sob a substituição  $S'_{(k,l)}$  é suficiente demonstrarmos o seguinte teorema.

**Teorema 2.15.** *O grafo  $H(S'_{(k,l)}) = (V(H), E(H))$  é não cancelador, para todo  $k \geq 4$  par e  $l \geq 3$ .*

Por ser longa e trabalhosa não detalharemos aqui a demonstração desse teorema<sup>13</sup>. Todavia, apresentaremos os passos necessários para sua prova no caso em que  $l$  é ímpar.

De fato, podemos proceder de modo semelhante ao que procedemos na demonstração do Teorema 2.13, isto é, começamos identificando os conjuntos de caminhos eulerianos que ligam o vértice 1 ao vértice  $k$  no grafo conexo  $H(S'_{(k,l)})$ , de modo a obtermos todos os caminhos eulerianos de 1 a  $k$  em  $H(S'_{(k,l)})$ . Posteriormente, calculamos o sinal desses caminhos em cada um desses conjuntos, para então obtermos a quantidade desses caminhos que são positivos e a quantidade que são negativos. Por fim, vemos que o número de caminhos eulerianos positivos que ligam o vértice 1 ao vértice  $k$  em  $H(S'_{(k,l)})$  é diferente do número de caminhos eulerianos negativos. Desse modo, obtemos que o grafo  $H(S'_{(k,l)})$  é não cancelador.

Finalmente, no caso em que  $k \geq 4$  é ímpar e  $l \geq 3$  é par, obtemos o seguinte teorema.

**Teorema 2.16.** *Se  $St_r(y_{1,1}, y_{2,1}, \dots, y_{r,1}) \equiv 0$  em  $(M_{k,l}(F), t)$ , onde  $k \geq 4$  é ímpar e  $l \geq 3$  é par, então  $r \geq 2k + 2l - 3$ .*

**Demonstração.** Nesse caso consideramos a substituição  $S'_{(k,l)} = \{f_1, \dots, f_{2k+2l-4}\}$ , onde

- $f_i = e_{i,k+1} + e_{k+1,i}$  e  $f_{k+i} = e_{i,k+2} + e_{k+2,i}$ , para  $1 \leq i \leq k$ ;
- $f_{2i-5} = e_{1i} + e_{i1}$  e  $f_{2i-4} = e_{ki} + e_{ik}$ , para  $k+3 \leq i \leq k+l$ .

Em seguida, recorremos ao grafo conexo  $H'(S'_{(k,l)}) = (V(H'), E(H'))$  associado a essa substituição, onde  $V(H') = \{1, \dots, k, k+1, \dots, k+l\}$  e  $E(H') = \{f_1, \dots, f_{2k+2l-4}\}$ , em que

- $f_i = \{i, k+1\}$  e  $f_{k+i} = \{i, k+2\}$ , para todo  $1 \leq i \leq k$ ;
- $f_{2i-5} = \{1, i\}$  e  $f_{2i-4} = \{i, k\}$ , para todo  $k+3 \leq i \leq k+l$ ;

---

<sup>13</sup>A demonstração do Teorema 2.15 está apresentada integralmente no Apêndice B desta tese.

cuja representação é dada pelo diagrama apresentado na Figura 2.8.

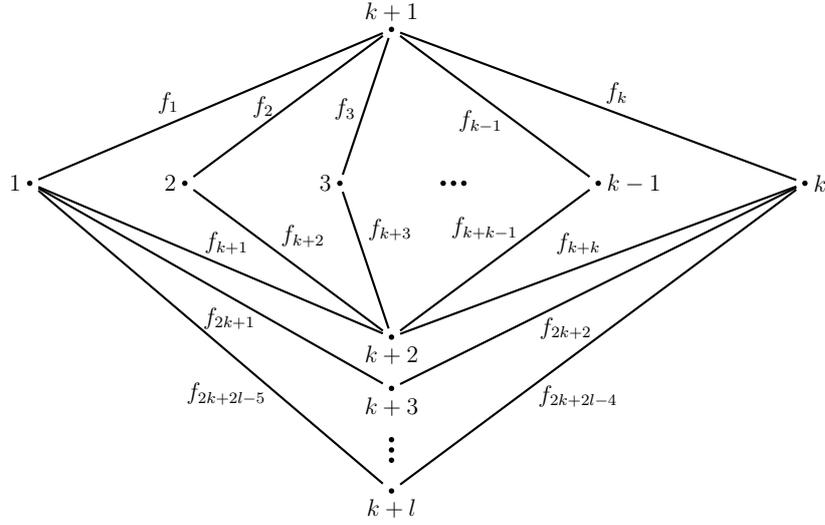


Figura 2.8: Grafo  $H'(S'_{(k,l)})$ .

Por sua vez, observamos que esse grafo é isomorfo ao grafo que está representado na Figura 2.9, que por argumentos análogos aos que foram considerados na demonstração do Teorema 2.15 é não cancelador.

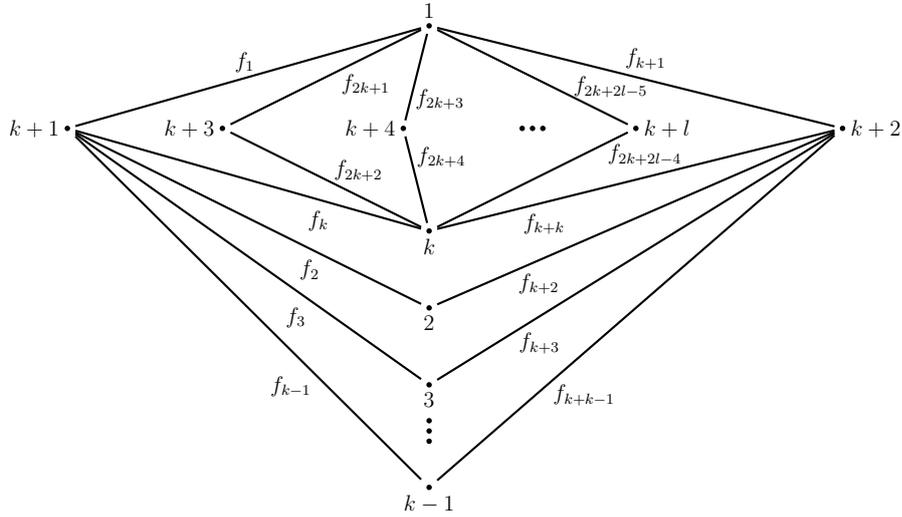


Figura 2.9: Grafo invertido.

Desse modo, o grafo  $H'(S'_{(k,l)})$  também é não cancelador e, em consequência do Teorema 2.6, temos que o polinômio standard não se anula sob a substituição  $S'_{(k,l)}$ . ■

Em razão dos teoremas acima e do Lema 2.5 obtemos que

$$2k + 2l - 5 \leq mdeg((St)_1^+) \leq \min\{kl + 1, 2k + 2l - 2\},$$

se  $k$  e  $l > 1$  são ambos ímpares e caso  $k$  ou  $l > 1$  seja par, temos

$$2k + 2l - 3 \leq mdeg((St)_1^+) \leq \min\{kl + 1, 2k + 2l - 2\}.$$

Posto isso, a pergunta que surge naturalmente é se na realidade essas cotas inferiores determinam (em cada um dos casos) o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis ímpares simétricas de  $(M_{k,l}(F), t)$ . Nesse sentido, o teorema a seguir nos comprova que no caso em que  $k = 4$  e  $l = 3$ , realmente  $2k + 2l - 3$  descreve o grau mínimo.

**Teorema 2.17.** *O grau mínimo de uma identidade standard em variáveis ímpares simétricas de  $(M_{4,3}(F), t)$  é igual a 11.*

**Demonstração.** Recordemos que

$$(M_{4,3}(F), t)_1^+ = \text{span}_F\{e_{15} + e_{51}, e_{25} + e_{52}, e_{35} + e_{35}, e_{45} + e_{45}, e_{16} + e_{61}, e_{26} + e_{62}, e_{36} + e_{36}, e_{46} + e_{46}, e_{17} + e_{71}, e_{27} + e_{72}, e_{37} + e_{37}, e_{47} + e_{47}\}.$$

Pela Proposição 1.2, a fim de mostrarmos que  $St_{11}(y_{1,1}, \dots, y_{11,1}) \equiv 0$  em  $(M_{4,3}(F), t)$ , basta mostrarmos que  $St_{11}(y_{1,1}, \dots, y_{11,1})$  se anula sob quaisquer substituições de elementos distintos da base de  $(M_{4,3}(F), t)_1^+$ . Para isso, denotaremos os elementos da base por

$$\alpha_i = e_{i5} + e_{5i} \quad \beta_i = e_{i6} + e_{6i} \quad \gamma_i = e_{i7} + e_{7i}, \quad \text{onde } i = 1, 2, 3, 4.$$

Como estamos interessados em substituições de 11 matrizes distintas, então elas são obtidas excluindo-se uma das matrizes acima, isto é, apenas as seguintes substituições podem ser escolhidas:

$$\begin{aligned} S_1^{(i,j,k)} &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \gamma_i, \gamma_j, \gamma_k\}, & \text{onde } 1 \leq i < j < k \leq 4; \\ S_2^{(i,j,k)} &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \beta_i, \beta_j, \beta_k\}, & \text{onde } 1 \leq i < j < k \leq 4; \\ S_3^{(i,j,k)} &= \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \alpha_i, \alpha_j, \alpha_k\}, & \text{onde } 1 \leq i < j < k \leq 4. \end{aligned}$$

Em seguida, considerando os grafos associados às substituições acima, temos que em todos esses grafos conexos  $\partial(i) = \partial(j) = \partial(k) = 3$ . Logo, pela Observação A.11, esses grafos não têm caminhos eulerianos. Dessa forma, pelo Teorema 2.6, concluímos que  $St_{11}(y_{1,1}, \dots, y_{11,1}) \equiv 0$  em  $(M_{4,3}(F), t)$ . ■

Finalizamos esse capítulo apresentando as seguintes conjecturas que são justificáveis pelos casos em que  $l = 2$  e  $k \geq 2$ ,  $l = 3$  e  $k = 3$ ,  $l = 3$  e  $k = 4$ .

**Conjectura 2.18.** *O grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis ímpares simétricas de  $(M_{k,l}(F), t)$  é igual a  $2k + 2l - 5$ , para todos  $k \geq l > 1$  ímpares.*

**Conjectura 2.19.** *O grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis ímpares simétricas de  $(M_{k,l}(F), t)$  é igual a  $2k + 2l - 3$ , para todos  $k \geq l > 1$  em que  $k$  ou  $l$  é par.*

# Capítulo 3

## Involução graduada simplética

Neste capítulo nosso intuito será apresentar o problema de determinar o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard de  $(M_{k,k}(F), s)$ . A princípio, abordaremos o problema no caso em que todas as variáveis na identidade standard são pares, simétricas ou antissimétricas. Veremos que nesses casos o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard de  $(M_{k,k}(F), s)$  é diretamente influenciado pelo grau mínimo de identidades standard de  $M_k(F)$ , fornecido pelo Teorema de Amitsur e Levitzki no contexto ordinário.

Em sequência, discutiremos o problema no caso em que todas as variáveis nas  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard são ímpares, simétricas ou antissimétricas. Concluiremos que nesses casos existe uma estreita relação entre o problema de se determinar o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard de  $(M_{k,k}(F), s)$  com o problema de se determinar o grau mínimo total de  $*$ -identidades duplas de Capelli em variáveis simétricas ou antissimétricas de  $(M_k(F), t)$ .

### 3.1 Variáveis pares simétricas ou antissimétricas

Nesta seção determinaremos o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis pares, simétricas ou antissimétricas de  $(M_{k,k}(F), s)$ . Nestes casos, demonstraremos que o grau mínimo é igual a  $2k$ , para todo  $k \geq 1$ . Ressaltamos que os resultados apresentados nessa seção estão publicados em [6].

Interessados em apresentar os resultados desta seção recordaremos que os subespaços pares, simétricos e antissimétricos de  $(M_{k,k}(F), s)$  são, respectivamente,

$$(M_{k,k}(F), s)_0^+ = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^t \end{pmatrix} \mid A \in M_k(F) \right\} \text{ e}$$

$$(M_{k,k}(F), s)_0^- = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^t \end{pmatrix} \mid A \in M_k(F) \right\}.$$

**Teorema 3.1.** *O grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis pares simétricas de  $(M_{k,k}(F), s)$  é igual a  $2k$ , para todo  $k \geq 1$ .*

**Demonstração.** Sejam  $U_{1,0}, \dots, U_{r,0} \in (M_{k,k}(F), s)_0^+$ . Então, obtemos que

$$U_{i,0} = \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_i^t \end{pmatrix}, \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq r,$$

onde  $A_1, \dots, A_r \in M_k(F)$ .

Dessa forma,

$$\begin{aligned} St_r(U_{1,0}, \dots, U_{r,0}) &= St_r \left( \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1^t \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & A_r^t \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} St_r(A_1, \dots, A_r) & 0 \\ 0 & St_r(A_1^t, \dots, A_r^t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como  $A_1, \dots, A_r$  e  $A_1^t, \dots, A_r^t$  são matrizes  $k \times k$ , pelo Teorema 1.3, temos que se  $r \geq 2k$ , então  $St_r(A_1, \dots, A_r) = 0$  e  $St_r(A_1^t, \dots, A_r^t) = 0$ .

Por outro lado, a partir do Teorema 1.3, obtemos também que se  $r < 2k$ , então  $St_r(x_1, \dots, x_r)$  não é uma identidade polinomial de  $M_k(F)$ . Isto é, existem matrizes  $B_1, \dots, B_r \in M_k(F)$ , tais que  $St_r(B_1, \dots, B_r) \neq 0$ . Assim, considerando as matrizes

$$V_{i,0} = \begin{pmatrix} B_i & 0 \\ 0 & B_i^t \end{pmatrix}, \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq r,$$

obtemos que

$$\begin{aligned} St_r(V_{1,0}, \dots, V_{r,0}) &= St_r \left( \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_1^t \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} B_r & 0 \\ 0 & B_r^t \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} St_r(B_1, \dots, B_r) & 0 \\ 0 & St_r(B_1^t, \dots, B_r^t) \end{pmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis pares simétricas de  $(M_{k,k}(F), s)$  é igual a  $2k$ , para todo  $k \geq 1$ . ■

Seguindo as mesmas ideias da demonstração anterior, podemos provar o seguinte teorema.

**Teorema 3.2.** *O grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis pares antissimétricas de  $(M_{k,k}(F), s)$  é igual a  $2k$ , para todo  $k \geq 1$ .*

Em conclusão, podemos observar nas demonstrações dos teoremas acima que o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis pares, simétricas ou antissimétricas

de  $(M_{k,k}(F), s)$  estão diretamente relacionados ao grau mínimo de identidades standard de  $M_k(F)$ . Mais que isso, usando os mesmos argumentos utilizados nessas demonstrações, podemos estabelecer o seguinte.

**Teorema 3.3.** *O grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades em variáveis pares, simétricas ou antissimétricas de  $(M_{k,k}(F), s)$  é igual a  $2k$ , para todo  $k \geq 1$ .*

## 3.2 Variáveis ímpares simétricas ou antissimétricas

Nesta seção estaremos interessados em obter informações a respeito do grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis ímpares, simétricas ou antissimétricas de  $(M_{k,k}(F), s)$ . Inicialmente, trataremos do caso em que todas as variáveis são ímpares antissimétricas. Nesse caso, mostraremos que o grau mínimo é igual a  $4k - 1$ , para todo  $k \geq 1$ . Em seguida, ao abordar o caso em que todas as variáveis são ímpares simétricas, forneceremos o grau mínimo para alguns valores pequenos de  $k$ .

Iniciaremos esta seção recordando que os subespaços ímpares, simétricos e antissimétricos de  $(M_{k,k}(F), s)$  são, respectivamente,

$$(M_{k,k}(F), s)_1^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & K \\ K' & 0 \end{pmatrix} \mid K, K' \in (M_k(F), t)^- \right\} \text{ e}$$

$$(M_{k,k}(F), s)_1^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & S \\ S' & 0 \end{pmatrix} \mid S, S' \in (M_k(F), t)^+ \right\}.$$

Iremos primeiramente abordar o problema em variáveis ímpares antissimétricas e começamos com a seguinte observação que segue diretamente da Proposição 1.2 e das substituições de elementos do subespaço  $(M_{1,1}(F), s)_1^-$  em  $St_2(z_{1,1}, z_{2,1})$ .

**Observação 3.4.** O grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis ímpares antissimétricas de  $(M_{1,1}(F), s)$  é igual a 3.

Uma vez estabelecido o grau mínimo no caso em que  $k = 1$ , na sequência, nosso objetivo será mostrar o seguinte teorema.

**Teorema 3.5.** *O grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis ímpares antissimétricas de  $(M_{k,k}(F), s)$  é igual a  $4k - 1$ , para todo  $k \geq 2$ .*

Em vista da Proposição 1.2, o primeiro passo que daremos para demonstrar o teorema acima é estabelecer que  $St_{4k-1}(z_{1,1}, \dots, z_{4k-1,1}) \equiv 0$  em  $(M_{k,k}(F), s)$ , para todo

$k \geq 2$ . Nesse sentido, observamos inicialmente que quando  $r$  é um natural ímpar, qualquer substituição de matrizes

$$V_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & Y_1 \\ Y'_1 & 0 \end{pmatrix}, V_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & Y_2 \\ Y'_2 & 0 \end{pmatrix}, \dots, V_{r,1} = \begin{pmatrix} 0 & Y_r \\ Y'_r & 0 \end{pmatrix} \in (M_{k,k}(F), s)_1^-$$

no polinômio standard  $St_r(z_{1,1}, z_{2,1}, \dots, z_{r,1})$ , resulta em

$$\begin{aligned} St_r(V_{1,1}, V_{2,1}, \dots, V_{r,1}) &= St_r \left( \begin{pmatrix} 0 & Y_1 \\ Y'_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & Y_2 \\ Y'_2 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & Y_r \\ Y'_r & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) Y_{\sigma(1)} Y'_{\sigma(2)} \dots Y'_{\sigma(r-1)} Y_{\sigma(r)} \\ \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) Y'_{\sigma(1)} Y_{\sigma(2)} \dots Y_{\sigma(r-1)} Y'_{\sigma(r)} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Observação 3.6.** Podemos notar que, para  $r$  ímpar,  $St_r(z_{1,1}, \dots, z_{r,1}) \equiv 0$  em  $(M_{k,k}(F), s)$  se, e somente se, o \*-polinômio  $g_r(y_1, \dots, y_r; y'_1, \dots, y'_r)$  em variáveis simétricas definido por

$$g_r(y_1, y_2, \dots, y_r; y'_1, y'_2, \dots, y'_r) := \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) y_{\sigma(1)} y'_{\sigma(2)} \dots y'_{\sigma(r-1)} y_{\sigma(r)}$$

é uma \*-identidade de  $(M_k(F), t)$ .

Agora, para demonstrar que  $g_{4k-1}(y_1, \dots, y_{4k-1}; y'_1, \dots, y'_{4k-1})$  é uma \*-identidade de  $(M_k(F), t)$ , será útil definirmos os chamados polinômios duplos de Capelli que foram amplamente estudados nos artigos [10], [12], [17] e [20].

**Definição 3.7.** Definimos os polinômios duplos de Capelli de grau total  $2n - 1$  e de grau total  $2n$  como sendo, respectivamente,

$$\mathcal{C}_n^{n-1}(u_1, \dots, u_n; v_1, \dots, v_{n-1}) := \sum_{\substack{\sigma \in S_n, \\ \tau \in S_{n-1}}} \text{sgn}(\sigma\tau) u_{\sigma(1)} v_{\tau(1)} \dots v_{\tau(n-1)} u_{\sigma(n)} \text{ e}$$

$$\mathcal{C}_n(u_1, \dots, u_n; v_1, \dots, v_n) := \sum_{\substack{\sigma \in S_n, \\ \tau \in S_n}} \text{sgn}(\sigma\tau) u_{\sigma(1)} v_{\tau(1)} \dots u_{\sigma(n)} v_{\tau(n)},$$

onde os índices de  $\mathcal{C}_n^{n-1}$  sugerem que temos  $n - 1$  variáveis  $v$ 's e  $n$  variáveis  $u$ 's e o índice de  $\mathcal{C}_n$  sugere que temos  $n$  variáveis  $u$ 's e  $n$  variáveis  $v$ 's.

Com essa definição em mente, demonstraremos o lema a seguir o qual estabelece que, para todo  $r$  ímpar, o \*-polinômio  $g_r(y_1, \dots, y_r; y'_1, \dots, y'_r)$  em variáveis simétricas, definido acima, é igual a uma combinação linear de \*-polinômios duplos de Capelli em variáveis

simétricas. Ressaltamos que no enunciado do lema abaixo e ao longo da sua demonstração usamos a notação

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(m) \end{pmatrix},$$

para denotar a permutação  $\pi$  de  $\{1, \dots, m\}$ .

**Lema 3.8.** *Para todo  $m \geq 1$ , temos que*

$$g_{2m-1}(y_1, \dots, y_{2m-1}; y'_1, \dots, y'_{2m-1}) = \sum \operatorname{sgn} \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2m-2 & 2m-1 \\ j_1 & i_1 & \dots & i_{m-1} & j_m \end{pmatrix} \right) \mathcal{C}_m^{m-1}(y_{j_1}, \dots, y_{j_m}; y'_{i_1}, \dots, y'_{i_{m-1}}),$$

onde a soma acima percorre todas as escolhas possíveis dos índices  $i_1, \dots, i_{m-1}$  e  $j_1, \dots, j_m$ , em que  $i_1 < \dots < i_{m-1}$ ,  $j_1 < \dots < j_m$  e  $\{i_1, \dots, i_{m-1}, j_1, \dots, j_m\} = \{1, \dots, 2m-1\}$ .

**Demonstração.** Consideremos

$$(3.1) \quad g_{2m-1}(y_1, \dots, y_{2m-1}; y'_1, \dots, y'_{2m-1}) = \sum_{\theta \in S_{2m-1}} \operatorname{sgn}(\theta) y_{\theta(1)} y'_{\theta(2)} \dots y'_{\theta(2m-2)} y_{\theta(2m-1)}.$$

Observe que, para  $\theta \in S_{2m-1}$ , o monômio

$$(3.2) \quad m_\theta := y_{\theta(1)} y'_{\theta(2)} \dots y'_{\theta(2m-2)} y_{\theta(2m-1)}$$

é um monômio do polinômio duplo de Capelli

$$\mathcal{C}_m^{m-1}(y_{j_1}, \dots, y_{j_m}; y'_{i_1}, \dots, y'_{i_{m-1}}) := \sum_{\substack{\sigma \in S_m, \\ \tau \in S_{m-1}}} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) y_{\sigma(j_1)} y'_{\tau(i_1)} y_{\sigma(j_2)} y'_{\tau(i_2)} \dots y'_{\tau(i_{m-1})} y_{\sigma(j_m)},$$

cujos coeficientes nesse polinômio é dado por  $\operatorname{sgn}(\sigma\tau)$ , onde  $\sigma$  é uma permutação de  $\{j_1, \dots, j_m\}$  e  $\tau$  é uma permutação de  $\{i_1, \dots, i_{m-1}\}$  dadas por

$$\sigma = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_m \\ \theta(1) & \theta(3) & \dots & \theta(2m-1) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tau = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{m-1} \\ \theta(2) & \theta(4) & \dots & \theta(2m-2) \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, se considerarmos o polinômio  $p(y_1, y_2, \dots, y_{2m-1}; y'_1, y'_2, \dots, y'_{2m-1})$  definido por

$$(3.3) \quad \sum \operatorname{sgn} \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2m-2 & 2m-1 \\ j_1 & i_1 & \dots & i_{m-1} & j_m \end{pmatrix} \right) \mathcal{C}_m^{m-1}(y_{j_1}, \dots, y_{j_m}; y'_{i_1}, \dots, y'_{i_{m-1}}),$$

então o coeficiente do monômio  $m_\theta$  no polinômio  $p(y_1, y_2, \dots, y_{2m-1}; y'_1, y'_2, \dots, y'_{2m-1})$  é o produto dos sinais:  $\operatorname{sgn} \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2m-2 & 2m-1 \\ j_1 & i_1 & \dots & i_{m-1} & j_m \end{pmatrix} \right)$ ,  $\operatorname{sgn} \left( \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_m \\ \sigma(j_1) & \dots & \sigma(j_m) \end{pmatrix} \right)$  e  $\operatorname{sgn} \left( \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_{m-1} \\ \tau(i_1) & \dots & \tau(i_{m-1}) \end{pmatrix} \right)$ , ou seja, é igual a

$$\operatorname{sgn} \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2m-2 & 2m-1 \\ \theta(1) & \theta(2) & \dots & \theta(2m-2) & \theta(2m-1) \end{pmatrix} \right) = \operatorname{sgn}(\theta),$$

que é o coeficiente de  $m_\theta$  no polinômio  $g_{2m-1}(y_1, \dots, y_{2m-1}; y'_1, \dots, y'_{2m-1})$  dado em (3.1).

Assim, todo monômio de  $g_{2m-1}(y_1, \dots, y_{2m-1}; y'_1, \dots, y'_{2m-1})$  é também um monômio do polinômio  $p(y_1, y_2, \dots, y_{2m-1}; y'_1, y'_2, \dots, y'_{2m-1})$  dado em (3.3).

Além disso, nós temos  $(2m-1)!$  monômios distintos em  $g_{2m-1}(y_1, \dots, y_{2m-1}; y'_1, \dots, y'_{2m-1})$  e temos também

$$\binom{2m-1}{m} m!(m-1)! = (2m-1)!$$

monômios distintos no polinômio  $p(y_1, y_2, \dots, y_{2m-1}; y'_1, y'_2, \dots, y'_{2m-1})$ . Desse modo, podemos concluir que

$$g_{2m-1}(y_1, \dots, y_{2m-1}; y'_1, \dots, y'_{2m-1}) = p(y_1, \dots, y_{2m-1}; y'_1, \dots, y'_{2m-1}).$$

■

Agora, com relação aos polinômios duplos de Capelli, em [12], Domokos estabelece o seguinte no contexto de identidades ordinárias.

**Teorema 3.9.** (Domokos, [12]) *O polinômio duplo de Capelli  $\mathcal{C}_{2k}^{2k-1}$  é uma identidade polinomial de  $M_k(F)$ . Além disso, ele é uma consequência do polinômio standard de grau  $2k$ .*

Então, como consequência do teorema acima e do Lema 3.8, obtemos o seguinte corolário no contexto de álgebras com involução.

**Corolário 3.10.** *O  $*$ -polinômio  $g_{4k-1}(y_1, \dots, y_{4k-1}; y'_1, \dots, y'_{4k-1})$  em variáveis simétricas é uma  $*$ -identidade polinomial de  $(M_k(F), t)$ .*

Finalmente, usando a Observação 3.6 e o corolário acima, podemos concluir que  $St_{4k-1}(z_{1,1}, \dots, z_{4k-1,1})$  é uma  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidade de  $(M_{k,k}(F), s)$ , para todo  $k \geq 2$ .

Em sequência, com o objetivo de finalizar a demonstração do Teorema 3.5, precisamos estabelecer que  $St_{4k-2}(z_{1,1}, \dots, z_{4k-2,1})$  não é uma  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidade polinomial de  $(M_{k,k}(F), s)$ , para todo  $k \geq 2$ . Para isso, começamos observando que qualquer substituição no polinômio standard  $St_{4k-2}(z_{1,1}, \dots, z_{4k-2,1})$  de matrizes do tipo

$$V_{i,1} = \begin{pmatrix} 0 & Y_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ para } i \text{ ímpar, com } 1 \leq i \leq 4k-2;$$

$$V_{i,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y'_i & 0 \end{pmatrix}, \text{ para } i \text{ par, com } 1 \leq i \leq 4k-2;$$

em que  $Y_1, Y_3, \dots, Y_{4k-3}$  e  $Y'_2, Y'_4, \dots, Y'_{4k-2}$  são matrizes simétricas (com relação a involução transposta), resulta em

$$St_r(V_{1,1}, V_{2,1}, \dots, V_{4k-2,1}) = St_r \left( \begin{pmatrix} 0 & Y_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y_2' & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y_{4k-2}' & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

$$\text{com } A = \sum_{\substack{\sigma \in S_{2k-1}, \\ \tau \in S_{2k-1}}} \text{sgn}(\sigma\tau) Y_{\sigma(1)} Y_{\tau(2)}' \dots Y_{\sigma(4k-3)} Y_{\tau(4k-2)}' = \mathcal{C}_{2k-1}(Y_1, \dots, Y_{4k-3}; Y_2', \dots, Y_{4k-2}')$$

$$\text{e } B = - \sum_{\substack{\mu \in S_{2k-1}, \\ \theta \in S_{2k-1}}} \text{sgn}(\mu\theta) Y_{\mu(2)}' Y_{\theta(1)} \dots Y_{\mu(4k-2)}' Y_{\theta(4k-3)} = -\mathcal{C}_{2k-1}(Y_2', \dots, Y_{4k-2}'; Y_1, \dots, Y_{4k-3}).$$

Portanto, para demonstrarmos que  $St_{4k-2}(z_{1,1}, \dots, z_{4k-2,1})$  não é uma  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidade polinomial de  $(M_{k,k}(F), s)$ , para todo  $k \geq 2$ , basta demonstrarmos o seguinte teorema no contexto de álgebras com involução.

**Teorema 3.11.** *O  $*$ -polinômio duplo de Capelli  $\mathcal{C}_{2k-1}(y_1, \dots, y_{2k-1}; y_1', \dots, y_{2k-1}')$  em variáveis simétricas não é uma  $*$ -identidade de  $(M_k(F), t)$ , para todo  $k \geq 2$ .*

Iremos usar na demonstração desse teorema uma interpretação para as substituições de matrizes simétricas elementares em  $\mathcal{C}_{2k-1}$ , com  $k \geq 2$ , parecida com a que foi fornecida por Owens para substituições de matrizes simétricas elementares no polinômio standard (que discutimos no Teorema 2.6). Nesse sentido, para uma substituição  $S$  de matrizes simétricas elementares em  $\mathcal{C}_l(y_1, \dots, y_l; y_1', \dots, y_l')$ , onde  $l \geq 3$ , determinada por

$$y_s = t_{i_s j_s} \quad \text{e} \quad y_s' = t_{m_s n_s}, \quad \text{onde } 1 \leq s \leq l,$$

com  $y_1, \dots, y_l$  matrizes distintas e  $y_1', \dots, y_l'$  também distintas, vamos associar um grafo  $G(S) = (V(G), E(G))$ , em que

$$V(G) = \{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_l, m_1, \dots, m_l, n_1, \dots, n_l\}$$

é o conjunto de vértices e

$$E(G) = \{\{i_s, j_s\} \mid y_s = t_{i_s j_s} \in S\} \cup \{\{m_s, n_s\} \mid y_s' = t_{m_s n_s} \in S\}$$

é o multiconjunto de arestas. Em seguida, rotularemos as arestas do conjunto  $\{\{i_s, j_s\} \mid t_{i_s j_s} \in S\}$  por  $f_s = \{i_s, j_s\}$  e as arestas do conjunto  $\{\{m_s, n_s\} \mid t_{m_s n_s} \in S\}$  por  $f_s' = \{m_s, n_s\}$ , para todo  $1 \leq s \leq l$ , (ou seja, rotularemos as arestas de cada parte do multiconjunto  $E(G)$  de modos distintos).

Caso o grafo obtido seja euleriano, chamaremos os caminhos eulerianos que são iniciados por uma aresta  $f_i$ , percorridos alternando-se as arestas  $f$  com as arestas  $f'$  e

finalizados com uma aresta  $f'_j$  de caminhos eulerianos alternados do tipo  $ff'$ . Do mesmo modo, chamaremos de caminhos eulerianos alternados do tipo  $f'f$ , os caminhos eulerianos que são iniciados por uma aresta  $f'_j$ , percorridos alternando-se as arestas  $f'$  com as arestas  $f$  e finalizados com uma aresta  $f_i$ .

Dessa forma, observamos que um caminho euleriano alternado do tipo  $ff'$  (resp.  $f'f$ ) pode ser descrito da forma  $f_{\sigma(1)}f'_{\tau(1)}f_{\sigma(2)}f'_{\tau(2)} \cdots f_{\sigma(l)}f'_{\tau(l)}$  (resp.  $f'_{\sigma(1)}f_{\tau(1)} \cdots f'_{\sigma(l)}f_{\tau(l)}$ ), onde  $\sigma \in S_l$  e  $\tau \in S_l$ .

**Definição 3.12.** Dado um caminho euleriano alternado  $f_{\sigma(1)}f'_{\tau(1)}f_{\sigma(2)}f'_{\tau(2)} \cdots f_{\sigma(l)}f'_{\tau(l)}$  em  $G(S)$ , definimos o sinal alternado desse caminho como sendo

$$\text{sgn}_A(f_{\sigma(1)}f'_{\tau(1)}f_{\sigma(2)}f'_{\tau(2)} \cdots f_{\sigma(l)}f'_{\tau(l)}) = \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\tau).$$

Assim, podemos enunciar o seguinte teorema.

**Teorema 3.13.** A  $(i, j)$ -ésima entrada da matriz  $\mathcal{E}_l(t_{i_1j_1}, \dots, t_{i_lj_l}; t_{m_1n_1}, \dots, t_{m_ln_l})$  é igual a  $\sum \text{sgn}_A(w_{ff'})$ , onde essa soma percorre todos os caminhos eulerianos alternados do tipo  $ff'$  de  $G(S)$  que ligam o vértice  $i$  ao vértice  $j$ . Caso não existam caminhos eulerianos alternados do tipo  $ff'$  ligando o vértice  $i$  ao vértice  $j$ , ou não existam esses vértices no grafo  $G(S)$ , então a  $(i, j)$ -ésima entrada de  $\mathcal{E}_l(t_{i_1j_1}, \dots, t_{i_lj_l}; t_{m_1n_1}, \dots, t_{m_ln_l})$  é nula. Em particular, caso o grafo  $G(S)$  seja desconexo, então a matriz  $\mathcal{E}_l(t_{i_1j_1}, \dots, t_{i_lj_l}; t_{m_1n_1}, \dots, t_{m_ln_l})$  é uma matriz nula.

**Demonstração.** A demonstração desse teorema é semelhante a demonstração do Teorema 2.6. Começamos notando que a multiplicação de três matrizes simétricas elementares  $t_{ij}$ ,  $t_{hl}$  e  $t_{mn}$ , em que pelo menos duas são distintas entre si, resulta em uma matriz elementar  $e_{rs}$ . Deste modo, associado à essa multiplicação, temos um caminho com as arestas associadas  $\{i, j\}$ ,  $\{h, l\}$  e  $\{m, n\}$  que liga o vértice  $r$  ao vértice  $s$  (omitimos aqui todas as multiplicações possíveis dessas matrizes e os caminhos relacionados, pois teríamos que considerar muitos casos. Entretanto, essencialmente ocorre o mesmo que foi discutido na demonstração do Teorema 2.6).

Assim, qualquer produto alternado  $t_{i_1j_1}t_{m_1n_1} \cdots t_{i_lj_l}t_{m_ln_l}$  de matrizes elementares simétricas substituídas nas variáveis  $y_i$  com as matrizes elementares simétricas substituídas nas variáveis  $y'_i$  é não nulo se, e somente se, a sequência de arestas

$$f_{\sigma(1)}f'_{\tau(1)} \cdots f_{\sigma(l)}f'_{\tau(l)} = \{i_{\sigma(1)}, j_{\sigma(1)}\}\{m_{\tau(1)}, n_{\tau(1)}\} \cdots \{i_{\sigma(l)}, j_{\sigma(l)}\}\{m_{\tau(l)}, n_{\tau(l)}\}$$

(com os vértices não necessariamente nessa ordem) forma um caminho euleriano alternado do tipo  $ff'$  em  $G(S)$ . Nesse caso, temos também que  $r = i_1$  ou  $r = j_1$  é o

vértice no qual o caminho tem início e  $s = n_l$  ou  $s = m_l$  é o vértice no qual o caminho termina. Portanto, qualquer monômio  $t_{i_{\sigma(1)}j_{\sigma(1)}}t_{m_{\tau(1)}n_{\tau(1)}} \cdots t_{i_{\sigma(l)}j_{\sigma(l)}}t_{m_{\tau(l)}n_{\tau(l)}}$  não nulo de  $\mathcal{C}_l(t_{i_1j_1}, \dots, t_{i_lj_l}; t_{m_1n_1}, \dots, t_{m_ln_l})$  que resulta na matriz elementar  $e_{ij}$  está associado ao caminho euleriano

$$f_{\sigma(1)}f'_{\tau(1)} \cdots f_{\sigma(l)}f'_{\tau(l)} = \{i_{\sigma(1)}, j_{\sigma(1)}\}\{m_{\tau(1)}, n_{\tau(1)}\} \cdots \{i_{\sigma(l)}, j_{\sigma(l)}\}\{m_{\tau(l)}, n_{\tau(l)}\}$$

(novamente não necessariamente os vértices nas arestas estão ligados nessa ordem) que tem início no vértice  $i$  e término no vértice  $j$ . Além disso, pela Definição 3.12 do sinal alternado de um caminho euleriano alternado, temos que

$$\text{sgn}_A(\{i_{\sigma(1)}, j_{\sigma(1)}\}\{m_{\tau(1)}, n_{\tau(1)}\} \cdots \{i_{\sigma(l)}, j_{\sigma(l)}\}\{m_{\tau(l)}, n_{\tau(l)}\}) = \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\tau),$$

de onde segue o resultado. ■

Mantendo em mente a discussão acima vamos demonstrar o Teorema 3.11. Queremos mostrar que

$$\mathcal{C}_{2k-1}(y_1, \dots, y_{2k-1}; y'_1, \dots, y'_{2k-1}) = \sum_{\substack{\sigma \in S_{2k-1}, \\ \tau \in S_{2k-1}}} \text{sgn}(\sigma\tau)y_{\sigma(1)}y'_{\tau(1)} \cdots y_{\sigma(2k-1)}y'_{\tau(2k-1)}$$

em variáveis simétricas não é uma \*-identidade de  $(M_k(F), t)$ , para todo  $k \geq 2$ . Para isso, precisamos fornecer uma substituição de matrizes simétricas elementares que não anula o polinômio  $\mathcal{C}_{2k-1}$ . Portanto, iremos considerar a seguinte substituição  $S$  em  $\mathcal{C}_{2k-1}$ :

- $y_i = e_{ii}$ , onde  $1 \leq i \leq k$ ;
- $y_{k+i} = e_{k-i, k-i+1} + e_{k-i+1, k-i}$ , onde  $1 \leq i \leq k-1$ ;
- $y'_i = e_{i, i+1} + e_{i+1, i}$ , onde  $1 \leq i \leq k-1$ ;
- $y'_{k+i} = e_{k-i, k-i}$ , onde  $0 \leq i \leq k-1$ .

Vamos associar a essa substituição o grafo conexo  $G(S) = (V(G), E(G))$ , em que  $V(G) = \{1, \dots, 2k-1\}$  é o conjunto de vértices e  $E(G) = \{f_1, \dots, f_{2k-1}\} \cup \{f'_1, \dots, f'_{2k-1}\}$  é o multiconjunto de arestas, com

- $f_i = \{i, i\}$ , onde  $1 \leq i \leq k$ ;
- $f_{k+i} = \{k-i, k-i+1\}$ , onde  $1 \leq i \leq k-1$ ;
- $f'_i = \{i, i+1\}$ , onde  $1 \leq i \leq k-1$ ;

- $f'_{k+i} = \{k - i, k - i\}$ , onde  $0 \leq i \leq k - 1$ ;

cuja representação está dada na Figura 3.1 a seguir.

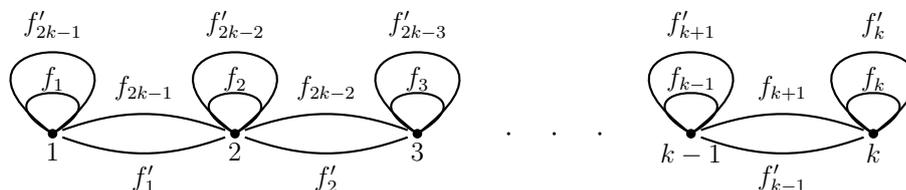


Figura 3.1: Grafo associado a substituição  $S$  no polinômio duplo de Capelli.

Vamos usar o Teorema 3.13 e restringir nossa atenção a  $(1, 1)$ -ésima entrada da matriz  $\mathcal{C}_{2k-1}(f_1, \dots, f_{2k-1}; f'_1, \dots, f'_{2k-1})$ . Então, para demonstrar o Teorema 3.11 demonstraremos o seguinte resultado a respeito do grafo  $G(S)$ .

**Lema 3.14.** *O número de caminhos eulerianos alternados do tipo  $ff'$  em  $G(S)$  que ligam o vértice 1 ao vértice 1 é ímpar.*

**Demonstração.** A fim de mostrarmos que o número de caminhos eulerianos alternados do tipo  $ff'$  de  $G(S)$  que ligam o vértice 1 ao vértice 1 é ímpar, iremos demonstrar usando indução em  $t$ , que os grafos conexos  $\Delta_t = (V(\Delta_t), E(\Delta_t))$ , em que  $V(\Delta_t) = \{1, \dots, t\}$  é o conjunto de vértices e  $E(\Delta_t) = \{f_1, \dots, f_{2t-1}\} \cup \{f'_1, \dots, f'_{2t-1}\}$  é o multiconjunto de arestas, definidas por

- $f_i = \{i, i\}$ , onde  $1 \leq i \leq t$ ;
- $f_{t+i} = \{t - i, t - i + 1\}$ , onde  $1 \leq i \leq t - 1$ ;
- $f'_i = \{i, i + 1\}$ , onde  $1 \leq i \leq t - 1$ ;
- $f'_{t+i} = \{t - i, t - i\}$ , onde  $0 \leq i \leq t - 1$ ;

cuja representação é dada pelo diagrama da Figura 3.2, têm um número ímpar de caminhos eulerianos alternados do tipo  $ff'$  que ligam 1 a 1 em  $\Delta_t$  (que denotaremos por  $d_t$ ), para todo  $t \geq 2$ .

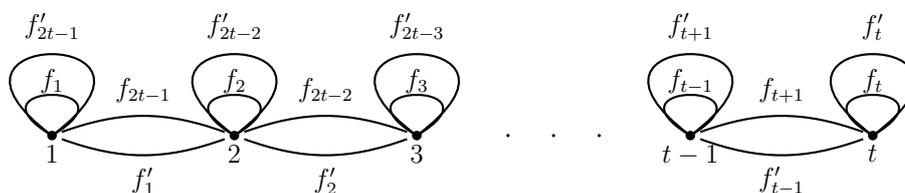


Figura 3.2: Grafo  $\Delta_t$ .

Desse modo, para  $t = 2$ , temos que os caminhos eulerianos alternados do tipo  $ff'$  de 1 a 1 em  $\Delta_2$  são dados por (veja a Figura 3.3):

$$f_1 f'_3 f_3 f'_2 f_2 f'_1, \quad f_1 f'_1 f_2 f'_2 f_3 f'_3 \quad \text{e} \quad f_3 f'_2 f_2 f'_1 f_1 f'_3.$$

Portanto,  $d_2 = 3$ , que é um número ímpar.

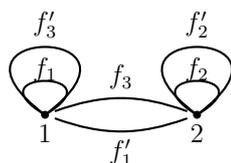


Figura 3.3: Grafo  $\Delta_2$ .

Agora, supondo que no grafo  $\Delta_{t-1}$  temos  $d_{t-1}$  ímpar, vamos mostrar que em  $\Delta_t$  temos  $d_t$  também ímpar. Inicialmente, note que o grafo  $\Delta_{t-1}$  (veja a Figura 3.4) é isomorfo ao

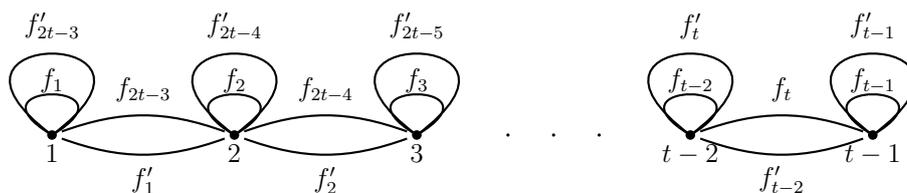


Figura 3.4: Grafo  $\Delta_{t-1}$ .

grafo  $\bar{\Delta}$ , cuja representação é dada na Figura 3.5, pois a bijeção  $g$  entre os conjuntos de vértices do grafo  $\Delta_{t-1}$  e o conjunto de vértices do grafo  $\bar{\Delta}$ , definida por  $g(i) = i + 1$ , preserva adjacências. Portanto, o número  $d_{t-1}$  de caminhos eulerianos alternados do tipo  $ff'$  de 1 a 1 em  $\Delta_{t-1}$  é igual ao número de caminhos eulerianos alternados do tipo  $ff'$  de 2 a 2 em  $\bar{\Delta}$  que, por simetria, é igual ao número de caminhos eulerianos alternados do tipo  $f'f$  de 2 a 2 em  $\bar{\Delta}$  (que denotaremos por  $\bar{d}$ ).

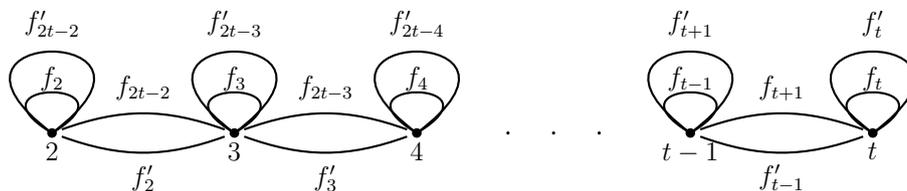


Figura 3.5: Grafo  $\bar{\Delta}$ .

Agora, pela hipótese de indução, temos que  $d_{t-1}$  é ímpar e, conseqüentemente,  $\bar{d}$  também é ímpar. Finalmente, podemos observar que os caminhos eulerianos alternados do tipo  $ff'$  de 1 a 1 em  $\Delta_t$  são dados por

1.  $f_1 f'_{2t-1} f_{2t-1} C'_j f'_1$ , onde  $1 \leq j \leq \bar{d}$ ;

$$2. f_1 f_1' C_j''' f_{2t-1} f_{2t-1}', \quad \text{onde } 1 \leq j \leq \bar{d};$$

$$3. f_{2t-1} C_j''' f_1 f_1' f_{2t-1}', \quad \text{onde } 1 \leq j \leq \bar{d};$$

em que  $C_j'$  e  $C_j'''$  denotam caminhos eulerianos alternados do tipo  $f'f$  de 2 a 2 em  $\bar{\Delta}$  e  $C_j''$  denota um caminho euleriano alternado do tipo  $ff'$  de 2 a 2 em  $\bar{\Delta}$ , para todo  $1 \leq j \leq \bar{d}$ . Portanto, temos que  $d_t = 3\bar{d}$  e como  $\bar{d} = d_{t-1}$  é ímpar, temos que  $d_t$  é ímpar.

Assim, por indução, temos que o número de caminhos eulerianos alternados do tipo  $ff'$  de 1 a 1 em  $\Delta_t$  é ímpar, para todo  $t \geq 2$ . Em particular, concluímos que o número de caminhos eulerianos alternados do tipo  $ff'$  em  $G(S)$  que ligam o vértice 1 ao vértice 1 é ímpar, para todo  $k \geq 2$ , de onde segue o resultado. ■

Desse modo, pelo lema anterior e pelo Teorema 3.13, obtemos que a  $(1, 1)$ -ésima entrada da matriz  $\mathcal{C}_{2k-1}(t_{11}, \dots, t_{kk}, t_{k-1,k}, \dots, t_{12}; t_{12}, \dots, t_{k-1,k}, t_{kk}, \dots, t_{11})$  é não nula. O que prova o Teorema 3.11.

Além do mais, pelos Teoremas 3.9 e 3.11, nós obtemos o seguinte corolário.

**Corolário 3.15.** *O grau mínimo total de uma  $*$ -identidade dupla de Capelli em variáveis simétricas de  $(M_k(F), t)$  é igual a  $4k - 1$ , para todo  $k \geq 2$ .*

Finalmente, em vista de toda a discussão realizada anteriormente obtemos o Teorema 3.5 que estabelece que o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis ímpares antissimétricas de  $(M_{k,k}(F), s)$  é igual a  $4k - 1$ , para todo  $k \geq 2$ .

Daqui em diante, estaremos interessados em abordar o problema de determinar o grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis ímpares simétricas de  $(M_{k,k}(F), s)$ . Tendo em vista o Teorema 1.6, já sabemos que  $4k - 2$  é uma cota superior para esse grau mínimo, para todo  $k \geq 1$ . Entretanto, ela parece não ser o grau mínimo nesse caso, uma vez que nos casos em que  $k = 1$  e  $k = 2$ , usando a base de matrizes elementares simétricas de  $(M_{k,k}(F), s)_1^+$  e o fato de o polinômio standard ser alternado, podemos verificar de modo direto que os graus mínimos obtidos são, respectivamente, 1 e 3. Além do mais, para  $k = 3$ , temos que o seguinte ocorre.

**Proposição 3.16.** *O grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis simétricas ímpares de  $(M_{3,3}(F), s)$  é igual a 7.*

**Demonstração.** Sendo  $\dim_F (M_{3,3}(F), s)_1^+ = 6$ , pelo fato do polinômio standard ser alternado, temos que  $St_7(y_{1,1}, \dots, y_{7,1}) \equiv 0$  em  $(M_{3,3}(F), s)$ . Por outro lado, recordemos que

$$(M_{3,3}(F), s)_1^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & K \\ K' & 0 \end{pmatrix} \mid K, K' \in (M_3(F), t)^- \right\}.$$

Portanto, para mostrar  $St_6(y_{1,1}, \dots, y_{6,1})$  não é uma  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidade de  $(M_{3,3}(F), s)$ , podemos considerar uma substituição de matrizes de  $(M_{3,3}(F), s)_1^+$  como abaixo

$$\begin{aligned} U_{1,1} &= \begin{pmatrix} 0 & Z_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & U_{2,1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Z'_2 & 0 \end{pmatrix} & U_{3,1} &= \begin{pmatrix} 0 & Z_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ U_{4,1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Z'_4 & 0 \end{pmatrix} & U_{5,1} &= \begin{pmatrix} 0 & Z_5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & U_{6,1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Z'_6 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

em que  $Z_1, Z_3, Z_5$  e  $Z'_2, Z'_4, Z'_6$  são matrizes antissimétricas com relação a involução transposta. Assim,

$$\begin{aligned} St_6(U_{1,1}, U_{2,1}, \dots, U_{6,1}) &= St_{2m-2} \left( \begin{pmatrix} 0 & Z_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Z'_2 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Z'_6 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{\substack{\sigma \in S_3, \\ \tau \in S_3}} \text{sgn}(\sigma\tau) Z_{\sigma(1)} Z'_{\tau(2)} \dots Z_{\sigma(5)} Z'_{\tau(6)} & 0 \\ 0 & - \sum_{\substack{\mu \in S_3, \\ \theta \in S_3}} \text{sgn}(\mu\theta) Z'_{\mu(2)} Z_{\theta(1)} \dots Z'_{\mu(6)} Z_{\theta(5)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{C}_3(Z_1, Z_3, Z_5; Z'_2, Z'_4, Z'_6) & 0 \\ 0 & -\mathcal{C}_3(Z'_2, Z'_4, Z'_6; Z_1, Z_3, Z_5) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Desse modo, a fim de obtermos que  $St_6(y_{1,1}, \dots, y_{6,1})$  não é uma  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidade polinomial de  $(M_{3,3}(F), s)$ , mostraremos que  $\mathcal{C}_3(z_1, z_2, z_3; z'_1, z'_2, z'_3)$  em variáveis antissimétricas não é uma  $*$ -identidade de  $(M_3(F), t)$ . Para tanto, consideremos a seguinte substituição em  $\mathcal{C}_3(z_1, z_2, z_3; z'_1, z'_2, z'_3)$  de matrizes elementares antissimétricas pertencentes a  $(M_3(F), t)^-$ :

$$z_1 = z'_1 = e_{12} - e_{21} \quad z_2 = z'_2 = e_{13} - e_{31} \quad z_3 = z'_3 = e_{23} - e_{32}$$

Então, podemos observar que com essa substituição

$$\begin{aligned} e_{11} \mathcal{C}_3(z_1, z_2, z_3; z'_1, z'_2, z'_3) e_{11} &= -z_1 z'_1 z_2 z'_2 z_3 z'_3 - z_1 z'_3 z_3 z'_1 z_2 z'_2 - z_1 z'_3 z_2 z'_1 z_3 z'_2 \\ &\quad - z_1 z'_3 z_2 z'_2 z_3 z'_1 - z_2 z'_2 z_1 z'_3 z_3 z'_1 - z_2 z'_3 z_3 z'_2 z_1 z'_1 \\ &\quad - z_2 z'_3 z_1 z'_1 z_3 z'_2 - z_2 z'_3 z_1 z'_2 z_3 z'_1 \\ &= 8 e_{11} \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que de fato  $\mathcal{C}_3(z_1, z_2, z_3; z'_1, z'_2, z'_3)$  não é uma  $*$ -identidade polinomial de  $(M_3(F), t)$  e, conseqüentemente,  $St_6(y_{1,1}, \dots, y_{6,1})$  não é uma  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidade polinomial de  $(M_{3,3}(F), s)$  e a proposição está provada.

■

Com o que foi discutido acima, temos que  $4k - 5$  determina o grau mínimo nos casos em que  $k = 2$  e  $k = 3$ . Além disso, observamos que qualquer substituição de matrizes

$$U_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & Z_1 \\ Z'_1 & 0 \end{pmatrix}, U_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & Z_2 \\ Z'_2 & 0 \end{pmatrix}, \dots, U_{4k-5,1} = \begin{pmatrix} 0 & Z_{4k-5} \\ Z'_{4k-5} & 0 \end{pmatrix} \in (M_{k,k}(F), s)_1^+$$

no polinômio standard  $St_{4k-5}(y_{1,1}, y_{2,1}, \dots, y_{4k-5,1})$  resulta em

$$\begin{aligned} St_{4k-5}(U_{1,1}, U_{2,1}, \dots, U_{4k-5,1}) &= St_r \left( \begin{pmatrix} 0 & Z_1 \\ Z'_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & Z_2 \\ Z'_2 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & Z_{4k-5} \\ Z'_{4k-5} & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) Z_{\sigma(1)} Z'_{\sigma(2)} \dots Z'_{\sigma(4k-6)} Z_{\sigma(4k-5)} \\ \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) Z'_{\sigma(1)} Z_{\sigma(2)} \dots Z_{\sigma(4k-6)} Z'_{\sigma(4k-5)} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, de modo semelhante ao caso antissimétrico,  $St_{4k-5}(y_{1,1}, \dots, y_{4k-5,1}) \equiv 0$  em  $(M_{k,k}(F), s)$  se, e somente se, o  $*$ -polinômio  $g_{4k-5}(z_1, \dots, z_{4k-5}; z'_1, \dots, z'_{4k-5})$  em variáveis antissimétricas é uma  $*$ -identidade de  $(M_k(F), t)$ .

Agora, observamos que a demonstração do Lema 3.8 independe do fato das variáveis do polinômio serem simétricas ou antissimétricas. Usando isto, temos que se  $\mathcal{C}_{2k-2}^{2k-3}$  em variáveis antissimétricas é uma  $*$ -identidade polinomial de  $(M_k(F), t)$ , então  $g_{4k-5}(z_1, \dots, z_{4k-5}; z'_1, \dots, z'_{4k-5})$  é uma  $*$ -identidade de  $(M_k(F), t)$ . Ou seja, se  $\mathcal{C}_{2k-2}^{2k-3}$  em variáveis antissimétricas é uma  $*$ -identidade de  $(M_k(F), t)$ , então  $St_{4k-5}(y_{1,1}, \dots, y_{4k-5,1})$  é uma  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidade de  $(M_{k,k}(F), s)$ .

Por sua vez, Domokos [12] estabelece o seguinte teorema no contexto ordinário de PI-álgebras.

**Teorema 3.17.** (Domokos, [12]) *O polinômio duplo de Capelli de grau total  $2n - 1$   $\mathcal{C}_n^{n-1}(u_1, \dots, u_n; v_1, \dots, v_{n-1})$  pertence ao  $T$ -ideal gerado pelo polinômio  $St_n(x_1, \dots, x_n)$ .*

Desse modo, obtemos que  $\mathcal{C}_{2k-2}^{2k-3}(u_1, \dots, u_{2k-2}; v_1, \dots, v_{2k-3})$  no contexto ordinário de PI-álgebras pertence ao  $T$ -ideal gerado pelo polinômio  $St_{2k-2}(x_1, \dots, x_{2k-2})$ . Por outro lado, Rowen em [41], determina que  $St_{2k-2}(z_1, \dots, z_{2k-2})$  em variáveis antissimétricas é uma  $*$ -identidade de  $(M_k(F), t)$ . Entretanto, não podemos concluir a partir disso que  $\mathcal{C}_{2k-2}^{2k-3}$  em variáveis antissimétricas é uma  $*$ -identidade de  $(M_k(F), t)$ , pois apesar de  $\mathcal{C}_{2k-2}^{2k-3}$  ser no contexto ordinário uma consequência do polinômio  $St_{2k-2}(x_1, \dots, x_{2k-2})$ , ainda não sabemos dizer se ele é ou não uma consequência de  $St_{2k-2}(z_1, \dots, z_{2k-2})$  no contexto de álgebras com involução uma vez que a demonstração fornecida por Domokos no contexto

ordinário não poder ser aplicada no contexto de involuções. Contudo, tendo em vista todos esses fatos e as observações de que  $4k - 5$  é o grau mínimo nos casos em que  $k = 2, 3$ , conjecturamos que o seguinte ocorre.

**Conjectura 3.18.** *O grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis ímpares simétricas de  $(M_{k,k}(F), s)$  é igual a  $4k - 5$ , para todo  $k \geq 2$ .*

# Capítulo 4

## Considerações Finais

Nessa tese nos concentramos no estudo da minimalidade do grau de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard da superálgebra de matrizes  $M_{k,l}(F)$  munida de uma involução graduada. Vimos que esse estudo está diretamente relacionado ao estudo da minimalidade do grau de  $*$ -identidades polinomiais da álgebra de matrizes  $M_k(F)$  munida das involuções transposta e simplética.

Contudo, no caso geral, o estudo da minimalidade do grau de  $*$ -identidades da álgebra de matrizes  $M_k(F)$  munida dessas involuções tem diversas questões ainda em aberto. No caso da minimalidade do grau de  $*$ -identidades polinomiais em variáveis simétricas de  $(M_k(F), t)$ , Slin'ko em [44] estabeleceu o seguinte.

**Teorema 4.1.** *(Slin'ko, [44]) O  $*$ -polinômio  $St_{2k}(y_1, \dots, y_{2k})$  é uma  $*$ -identidade em variáveis simétricas de grau mínimo de  $(M_k(F), t)$ , para todo  $k \geq 1$ .*

Entretanto, quando apenas variáveis antissimétricas são consideradas ainda não foi estabelecida uma resposta definitiva para o problema. O que é conhecido até o momento é que no caso em que  $k$  é ímpar, devido ao Teorema 1.5, o grau mínimo é menor ou igual a  $2k - 2$ , para todo  $k \geq 2$  e no caso em que  $k$  é par o seguinte foi obtido por Hill em [26].

**Teorema 4.2.** *(Hill, [26]) Seja  $F$  um corpo. Então, existe uma  $*$ -identidade polinomial em variáveis antissimétricas de  $(M_k(F), t)$  de grau  $2k - 3$ , para todo  $k > 2$  par.*

Por fim, no caso geral em que não há restrições nas variáveis consideradas nas  $*$ -identidades polinomiais de  $(M_k(F), t)$  o grau mínimo é conhecido apenas nos casos em que  $k \leq 4$  (ver [15] e [33]) e em geral, Giambruno [17] estabeleceu o seguinte.

**Teorema 4.3.** *(Giambruno, [17]) Seja  $k > 2$ . Se  $f$  é uma  $*$ -identidade polinomial de  $(M_k(F), *)$ , então  $gr(f) \geq k + 1$ .*

Em particular, o grau de uma  $*$ -identidade polinomial de  $(M_k(F), t)$  é sempre maior que  $k$ .

Agora, no caso da minimalidade do grau de  $*$ -identidades polinomiais em variáveis simétricas de  $(M_{2k}(F), s)$ , Rashkova [36] determinou o seguinte.

**Teorema 4.4.** *(Rashkova, [36]) O grau mínimo de uma  $*$ -identidade polinomial em variáveis simétricas de  $(M_6(F), s)$  é igual a 9.*

Em seguida, Hill em [25] forneceu uma cota superior para o grau mínimo de  $*$ -identidades polinomiais em variáveis simétricas de  $(M_{2k}(F), s)$  ao demonstrar o seguinte teorema.

**Teorema 4.5.** *(Hill, [25]) Seja  $F$  um corpo. Então, existe uma  $*$ -identidade polinomial em variáveis simétricas de  $(M_{2k}(F), s)$  de grau  $4k - 3$ , para todo  $k > 1$ .*

Assim, o que é conhecido até o momento é que o grau mínimo neste caso é exatamente  $4k - 3$  no caso em que  $k = 3$  e é menor ou igual a  $4k - 3$ , para todo  $k > 3$ .

No caso da minimalidade do grau de  $*$ -identidades em variáveis antissimétricas de  $(M_{2k}(F), s)$  Giambruno e Valenti em [21] estabeleceram uma cota superior e inferior para este caso.

**Teorema 4.6.** *(Giambruno e Valenti, [21]) Seja  $F$  um corpo de característica zero. Então, existe uma  $*$ -identidade polinomial em variáveis antissimétricas de  $(M_{2k}(F), s)$  de grau  $4k - 1$ , para todo  $k > 1$ . Além disso, se  $f$  for uma  $*$ -identidade polinomial em variáveis antissimétricas de  $(M_{2k}(F), s)$ , então  $gr(f) > 3k$ , para todo  $k > 1$ .*

Por fim, quando não há restrições nas variáveis consideradas o grau mínimo para as  $*$ -identidades polinomiais de  $(M_{2k}(F), s)$  foi determinado apenas nos casos em que  $k = 1, 2$  por D'Amour e Racine [16]. Além disso, uma completa descrição acerca das identidades polinomiais de  $(M_2(F), t)$  e  $(M_2(F), s)$  foi apresentada em [33] por Levchenko.

Todos os resultados citados acima foram obtidos após os estudos realizados por Kostant, Slin'ko, Hutchinson e Rowen a respeito da minimalidade do grau de identidades standard das álgebras de matrizes  $M_k(F)$  munidas de involuções. Inclusive, alguns desses resultados foram obtidos usando técnicas provenientes desses estudos. Nesta tese demos o primeiro passo em direção ao estudo da minimalidade do grau de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades polinomiais das superálgebras de matrizes  $M_{k,l}(F)$  munidas de involuções graduadas. Assim, em trabalhos futuros, pretendemos nos aprofundar nesse estudo e obter mais avanços em relação as conjecturas estabelecidas nesta tese.

Atualmente, para abordar as Conjecturas 2.18 e 2.19 estamos usando a relação estabelecida no Corolário 2.7 e nos concentrando no estudo dos grafos associados a substituições

de matrizes pertencentes ao subespaço  $(M_{k,l}(F), t)_1^+$  no polinômio standard. Em relação a esses grafos foi observado que todos eles são grafos bipartidos.

**Definição 4.7.** Um grafo  $G$  é dito bipartido se o seu conjunto de vértices  $V(G)$  pode ser dividido em uma união disjunta de dois subconjuntos  $V(A)$  e  $V(B)$ , em que toda aresta de  $G$  liga um vértice de  $V(A)$  a um vértice de  $V(B)$ , isto é, não existem arestas em  $G$  ligando vértices pertencentes a um mesmo subconjunto da partição.

Denotando por  $\mathcal{P}_b(n, m)$  a família de todos os grafos bipartidos eulerianos com  $n$  vértices e  $m$  arestas não direcionadas, Hutchinson demonstrou em [28, Corolário 2] o seguinte teorema.

**Teorema 4.8.** *(Hutchinson, [28]) Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $G \in \mathcal{P}_b(n, m)$ , com  $m \geq 2n - 2$ , então  $G$  é um grafo cancelador.*

Entretanto, ainda não é conhecido se  $2n - 2$  é o número mínimo de arestas que um grafo bipartido euleriano tem que ter para ser cancelador. De fato, o seguinte resultado que estabelecemos em [8] indica que  $2n - 2$  não parece ser, em geral, o número mínimo de arestas.

**Teorema 4.9.** *Seja  $n$  um natural ímpar. Se  $G \in \mathcal{P}_b(n, m)$ , com  $m \geq 2n - 3$  e  $V(G) = V(A) \dot{\cup} V(B)$ , onde ou  $\#V(A)$ , ou  $\#V(B)$  é par, então  $G$  é um grafo cancelador.*

Além disso, no caso em que  $n$  é par, nós temos a seguinte conjectura.

**Conjectura 4.10.** *Seja  $n$  um natural par. Se  $G \in \mathcal{P}_b(n, m)$ , com  $m \geq 2n - 5$  e  $V(G) = V(A) \dot{\cup} V(B)$ , onde  $\#V(A)$  e  $\#V(B)$  são ímpares, então  $G$  é um grafo cancelador.*

Por fim, assumindo a conjectura acima, o seguinte pode ser mostrado.

**Corolário 4.11.** *Seja  $n$  um natural par. Se  $G \in \mathcal{P}_b(n, m)$ , com  $m \geq 2n - 3$  e  $V(G) = V(A) \dot{\cup} V(B)$ , onde  $\#V(A)$  e  $\#V(B)$  são pares, então  $G$  é um grafo cancelador.*

Agora, vamos mostrar a seguir que assumindo os resultados acima obtemos as conjecturas da tese.

**Conjectura 4.12.** *O grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis ímpares simétricas de  $(M_{k,l}(F), t)$  é igual a  $2k + 2l - 5$ , para todo  $k, l$ , com  $k \geq l > 1$  ímpares.*

**Demonstração.** Pelo Teorema 2.12, temos que o grau mínimo nesse caso é maior ou igual a  $2k + 2l - 5$ . Desse modo, pela Proposição 1.2, nos resta mostrar que  $St_{2k+2l-5}(y_{1,1}, \dots, y_{2k+2l-5,1}) \equiv 0$  em  $(M_{k,l}(F), t)$ . Para isso, consideremos uma substituição  $S$  de  $2k + 2l - 5$  matrizes simétricas elementares distintas pertencentes ao subespaço  $(M_{k,l}(F), t)_1^+$ , isto é,  $S = \{e_{i_1, k+j_1} + e_{k+j_1, i_1}, \dots, e_{i_{2k+2l-5}, k+j_{2k+2l-5}} + e_{k+j_{2k+2l-5}, i_{2k+2l-5}}\}$ , onde  $i_1, \dots, i_{2k+2l-5} \in \{1, \dots, k\}$  e  $k + j_1, \dots, k + j_{2k+2l-5} \in \{k + 1, \dots, k + l\}$ . Note que o grafo  $G(S)$  associado a  $S$  é tal que  $V(G) = \{i_1, \dots, i_{2k+2l-5}\} \dot{\cup} \{k + j_1, \dots, k + j_{2k+2l-5}\}$  e  $E(G) = \{\{i_1, k + j_1\}, \dots, \{i_{2k+2l-5}, k + j_{2k+2l-5}\}\}$ , ou seja,  $G(S)$  é um grafo bipartido com  $2k + 2l - 5$  arestas e tal que  $\#V(A) = k - j$  e  $\#V(B) = l - s$ , com  $0 \leq j < k$  e  $0 \leq s < l$ .

Por sua vez, caso  $k - j$  e  $l - s$  sejam ímpares, por  $2k + 2l - 5 > 2(k - j) + 2(l - s) - 5$ , segue da Conjectura 4.10 que  $G(S)$  é cancelador. Por outro lado, caso  $k - j$  ou  $l - s$  seja par, por  $2k + 2l - 5 \geq 2(k - j) + 2(l - s) - 3$ , segue do Teorema 4.9 e Corolário 4.11 que  $G(S)$  é cancelador. Desse modo, concluímos que  $G(S)$  é cancelador. Por fim, usando o Corolário 2.7, obtemos que  $St_{2k+2l-5}(y_{1,1}, \dots, y_{2k+2l-5,1}) \equiv 0$  em  $(M_{k,l}(F), t)$ . ■

**Conjectura 4.13.** *O grau mínimo de  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidades standard em variáveis ímpares simétricas de  $(M_{k,l}(F), t)$  é igual a  $2k + 2l - 3$ , para todos  $k \geq l > 1$  em que  $k$  ou  $l$  é par.*

**Demonstração.** Pelo Teorema 2.14, temos que o grau mínimo, nesse caso, é maior ou igual a  $2k + 2l - 3$ . Desse modo, pela Proposição 1.2, resta mostrarmos que  $St_{2k+2l-3}(y_{1,1}, \dots, y_{2k+2l-3,1}) \equiv 0$  em  $(M_{k,l}(F), t)$ . Para isso, consideremos uma substituição  $S$  de  $2k + 2l - 3$  matrizes simétricas elementares distintas pertencentes ao subespaço  $(M_{k,l}(F), t)_1^+$ , isto é,  $S = \{e_{i_1, k+j_1} + e_{k+j_1, i_1}, \dots, e_{i_{2k+2l-3}, k+j_{2k+2l-3}} + e_{k+j_{2k+2l-3}, i_{2k+2l-3}}\}$ , onde  $i_1, \dots, i_{2k+2l-3} \in \{1, \dots, k\}$  e  $k + j_1, \dots, k + j_{2k+2l-3} \in \{k + 1, \dots, k + l\}$ . Note que o grafo  $G(S)$  associado a  $S$  é tal que  $V(G) = \{i_1, \dots, i_{2k+2l-3}\} \dot{\cup} \{k + j_1, \dots, k + j_{2k+2l-3}\}$  e  $E(G) = \{\{i_1, k + j_1\}, \dots, \{i_{2k+2l-3}, k + j_{2k+2l-3}\}\}$ , ou seja,  $G(S)$  é um grafo bipartido com  $2k + 2l - 3$  arestas e tal que  $\#V(A) = k - j$  e  $\#V(B) = l - s$ , com  $0 \leq j < k$  e  $0 \leq s < l$ .

Agora, caso  $k - j$  e  $l - s$  sejam ímpares, por  $2k + 2l - 3 > 2(k - j) + 2(l - s) - 5$ , segue da Conjectura 4.10 que  $G(S)$  é cancelador. Por outro lado, caso  $k - j$  ou  $l - s$  seja par, por  $2k + 2l - 3 \geq 2(k - j) + 2(l - s) - 3$ , segue do Teorema 4.9 e Corolário 4.11 que  $G(S)$  é cancelador. Em todo caso, temos que  $G(S)$  é cancelador. Por fim, usando o Corolário 2.7, obtemos que  $St_{2k+2l-3}(y_{1,1}, \dots, y_{2k+2l-3,1}) \equiv 0$  em  $(M_{k,l}(F), t)$ . ■

Em resumo, combinando os resultados acima com os Teoremas 2.13 e 2.15 demonstrados ao longo da tese, podemos através do Corolário 2.7 obter as Conjecturas 2.18 e 2.19.

No momento estamos trabalhando na demonstração da Conjectura 4.10.

# Referências Bibliográficas

- [1] J. Adamsson. *The standard polynomial as an identity on symplectic matrices*. M.Sc thesis. University of Ottawa (1992).
- [2] A. Amitsur and J. Levitzki. *Minimal identities for algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950) 449-463.
- [3] S. Antonov. *The Least Degree of Identities in the Subspace  $M_1^{(m,k)}(F)$  of the Matrix Superalgebra  $M^{(m,k)}(F)$* . Russian Mathematics. (Iz. VUZ) **56** (2012) 1-16.
- [4] M. Ariannejad. *A graph theoretical equivalence for Amitsur-Levitzki theorem*. Linear and Multilinear Algebra. **64** (2016) 2486-2490.
- [5] D. Bessades, G. Leal, R. dos Santos and A. C. Vieira. *Matrix algebras with involution and standard polynomial identities in symmetric variables*. Linear Algebra Appl. **582** (2019) 467-481.
- [6] D. Bessades, R. dos Santos and A. C. Vieira. *Minimal degree of identities of matrix algebras with additional structures*. In: A. Giambruno and O. Di Vincenzo. Polynomial Identities in Algebras. Springer International Publishing **44** (2021).
- [7] D. Bessades, R. dos Santos and A. C. Vieira. *Minimal degree of standard identities of matrix algebras with symplectic graded involution*. Preprint.
- [8] D. Bessades, M. Collares. *Minimal degree of standard identities of matrix algebras with transpose graded involution and cancelling bipartite graphs*. Preprint.
- [9] M. Bresar, C. Procesi and S. Spenko. *Quasi-identities on matrices and the Cayley-Hamilton polynomial*. Advances in Mathematics. **280** (2015). 439-471.
- [10] Q. Chang. *Some consequences of the standard polynomial*. Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988) 707-710.
- [11] M. Domokos. *Eulerian polynomial identities and algebras satisfying a standard identity*. J. Algebra. **169** (1994) 913-928.

- [12] M. Domokos. *A generalization of a theorem of Chang*. Comm. Algebra. **23** (1995) 4333-4342.
- [13] V. Drensky. *A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*. Algebra and Logic. **20** (1981) 188-194.
- [14] V. Drensky and A. Kasparian. *A new central polynomial for  $3 \times 3$  matrices*. Communications in Algebra. **13** (1985) 745-752.
- [15] A. D'Amour and M. Racine. *\*-polynomial identities of matrices with transpose involution: The low degrees*. Trans. Amer. Math. Soc **12** (1999) 895-918.
- [16] A. D'Amour and M. Racine. *\*-polynomial identities of matrices with symplectic involution: The low degrees*. Comm. Algebra **32** (2004) 895-918.
- [17] A. Giambruno. *On \*-polynomial identities for  $n \times n$  matrices*. J. Algebra. **133** (1990) 433-438.
- [18] A. Giambruno, A. Ioppolo and F. Martino. *Standard polynomials and matrices with superinvolutions*. Linear Algebra Appl. **504** (2016) 272-291.
- [19] A. Giambruno, R. dos Santos and A. Vieira. *Identities of \*-superalgebras and almost polynomial growth*. Linear and Multilinear Algebra. **64** (2016) 484-501.
- [20] A. Giambruno and S. Sehgal. *On a polynomial identity for  $n \times n$  matrices*. J. Algebra. **126** (1989) 451-453.
- [21] A. Giambruno and A. Valenti. *On minimal \*-identities of matrices*. Linear and Multilinear Algebra. **39** (1995) 309-323.
- [22] A. Giambruno and M. Zaicev. *Polynomial identities and asymptotic methods*. Amer. Math. Soc. (2005).
- [23] P. Gié, G. Pinczon and R. Ushirobira. *Back to the Amitsur-Levitzki Theorem: a Super Version for the Orthosymplectic Lie Superalgebra  $osp(1,2n)$* . Letters in Mathematical Physics. **66** (2003) 141-155.
- [24] F. Harary. *Graph Theory*. Westview Press. (1994).
- [25] D. Hill. *Polynomial identities for matrices symmetric with respect to the symplectic involution*. J. Algebra **349** (2012) 8-21.

- [26] D. Hill. *An identity of degree  $2n - 3$  for the  $n \times n$  skew-symmetric matrices,  $n$  even, and corollaries for standard identities*. Linear Algebra Appl **439** (2013) 310-327.
- [27] J. Hutchinson. *Eulerian graphs and polynomial identities for sets of matrices*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **71** (1974) 1314-1316.
- [28] J. Hutchinson. *Cancelling eulerian graphs*. In: A. Bari, F. Harary, Graphs and Combinatorics. Lecture Notes in Mathematics Springer, **406** (1974).
- [29] J. Hutchinson. *Eulerian graphs and polynomial identities for skew-symmetric matrices*. Can. J. Math. **3** (1975) 590-609.
- [30] B. Kostant. *A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur-Levitski and cohomology theory*. J. Math. Mech. **7** (1958) 237-264.
- [31] B. Kostant. *A Lie algebra generalization of the Amitsur-Levitski theorem*. Adv. in Math. **40** (1981) 155-175.
- [32] A. Lee. G. Révész. J. Szigeti and Z. Tuza. *Capelli polynomials, almost-permutation matrices and sparse Eulerian graphs*. Discr. Math. **230** (2001) 49-61.
- [33] D. Levchenko. *Finite basis of identities with involution for the second order matrix algebra*. Serdica. **8** (1982) 42-56 (Russian).
- [34] O. Oystein. *Theory of graphs*. Amer. Math. Soc. Colloq. **38** (1962).
- [35] F. Owens. *Graph theory and identities on matrices*. Notices Amer. Math. Soc. **14** (1973) 367-373.
- [36] T. Rashkova. *\*-polynomial identities of minimal degree in matrix algebra of low order*. Period. Math. Hungar. **34** (1998) 229-233.
- [37] Yu. Razmyslov. *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*. Algebra and Logic. **12** (1973) 47-63.
- [38] Yu. Razmyslov. *Identities with trace in full matrix algebras over a field of characteristic zero*. Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya. **38** (1974) 723-756.
- [39] G. Révész, J. Szigeti and Z. Tuza. *Eulerian polynomial identities on matrix rings*. J. Algebra **161** (1993) 90-101.

- [40] S. Rosset. *A new proof of the Amitsur-Levitski identity*. Israel J. Math. **23** (1976) 187-188.
- [41] L. Rowen. *Standard polynomials in matrix algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. **190** (1974) 253-284.
- [42] L. Rowen. *Polynomial identities in ring theory*. Academic press. INC. London. (1980).
- [43] L. Rowen. *A simple proof of Kostant's theorem and an analogue for the symplectic involution*. Contemp. Math. **13** (1982) 207-215.
- [44] A. Slin'ko. *Special varieties of Jordan algebras*. Mat. Zametki. **26** (1979) 337-344.
- [45] R. Swan. *An application of graph theory to algebra*. Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963) 367 - 373. Correction to: "An application of graph theory to algebra ". **21** (1969) 379-380.
- [46] W. Wagner. *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlssysteme*. Math. Ann. **113** (1937) 528-567.
- [47] C. Wall. *Graded Brauer groups*. J. Reine Angew. Mth. **213** (1963) 187-199.

# Apêndice A

## Teoria de grafos

Neste apêndice apresentaremos uma breve introdução a teoria de grafos dando ênfase aos conceitos e resultados que utilizamos no desenvolvimento desta tese. Ressaltamos que usaremos como referência principal o livro [24].

### A.1 Grafos eulerianos

Um *grafo finito*  $G$  consiste em um conjunto finito  $V(G)$ , cujos elementos são chamados de vértices e de um conjunto  $E(G)$  de pares não ordenados de elementos distintos de  $V$ , os quais são chamados de arestas, isto é,  $E(G) \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V \text{ e } u \neq v\}$ .

Dada uma aresta  $e = \{u, v\}$ , dizemos que  $e$  liga o vértice  $u$  ao vértice  $v$ , que  $u$  e  $v$  são *adjacentes* e que  $u$  e  $v$  são os *vértices extremos* da aresta  $e$ . Dizemos ainda que a aresta  $e$  incide nos vértices  $u$  e  $v$  e que duas arestas de  $G$  são *adjacentes* se elas incidem em um mesmo vértice. Por fim, definimos o *grau de um vértice*  $v$ , simbolizado por  $\partial(v)$ , como sendo o número de arestas que incidem em  $v$ .

É recorrente e muito útil representarmos um grafo através de um diagrama e nos referirmos a este diagrama como sendo o grafo. Por exemplo, no grafo da Figura A.1 a aresta  $e_1$  liga o vértice 1 ao vértice 2;  $e_2$  liga o vértice 2 ao vértice 3; o vértice 2 tem grau 3 e apesar das arestas  $e_5$  e  $e_6$  se intersectarem no grafo, a sua interseção não se torna um vértice do grafo.

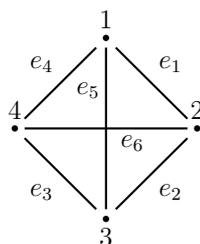


Figura A.1: Exemplo de grafo.

Existem diversas variações de grafos, porém nesta tese trabalhamos apenas com dois tipos dessas variações: os chamados *multigrafos*, que são grafos nos quais mais de uma aresta pode ligar um par de vértices distintos (essas arestas são chamadas múltiplas arestas), e os *pseudografos*, que são grafos nos quais múltiplas arestas e laços (arestas que ligam um vértice a si mesmo) são permitidos. Ao longo do texto, iremos nos referir a multigrafos e pseudografos apenas como grafos, ficando claro a partir do contexto qual o tipo de variação está sendo, naquele momento, utilizada. Todas as definições e resultados que estão sendo estabelecidos aqui para grafos, são estabelecidos de maneira análoga para essas duas variações, porém é importante salientar que em pseudografos o grau de um vértice permanece sendo definido como o número de arestas que incidem no vértice, mas com a ressalva que laços são contados duas vezes. Por exemplo, no grafo da Figura A.2 temos  $\partial(1) = 6$ .

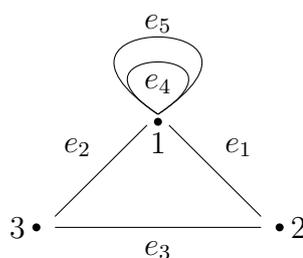


Figura A.2: Exemplo de pseudografo.

Uma *sequência de arestas* em um grafo  $G$  é uma série de arestas  $e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_n}$ , na qual arestas consecutivas sempre têm um vértice extremo em comum, isto é, podemos escrever

$$e_{i_1} = \{v_0, v_1\}, e_{i_2} = \{v_1, v_2\}, \dots, e_{i_{n-1}} = \{v_{n-2}, v_{n-1}\}, e_{i_n} = \{v_{n-1}, v_n\}.$$

**Definição A.1.** Um *caminho* em um grafo  $G$  é definido<sup>1</sup> como sendo uma sequência de arestas em que todas as arestas são distintas, isto é, cada aresta aparece na sequência exatamente uma vez.

Definimos o *comprimento de um caminho* como sendo o número de arestas que aparecem nesse caminho. Dizemos ainda que um caminho liga o vértice  $v_1$  ao vértice  $v_n$ , se  $v_1$  é o vértice inicial e  $v_n$  é o vértice final desse caminho. Por exemplo, o caminho  $e_2e_4e_5e_1$  do grafo apresentado na Figura A.2, liga o vértice 3 ao vértice 2 e tem comprimento 4.

**Definição A.2.** Um *caminho euleriano* em um grafo  $G$  é definido como sendo um caminho que percorre todas as arestas do grafo  $G$ . Ou seja, é uma sequência de arestas na qual todas as arestas do grafo aparecem e aparecem exatamente uma vez.

<sup>1</sup>Aqui estamos adotando a terminologia usada em [34], em algumas referências esse objeto é comumente chamado de trilha.

**Exemplo A.3.** Os caminhos  $e_1e_2e_3e_4$  e  $e_4e_3e_2e_1$  são caminhos eulerianos que ligam o vértice 1 ao vértice 1 no grafo da Figura A.3.

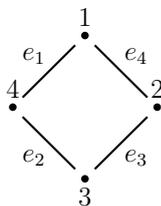


Figura A.3: Grafo com caminho euleriano.

**Definição A.4.** Dizemos que um grafo  $G$  é *conexo* se qualquer par de pontos é ligado por ao menos uma sequência de arestas.

**Definição A.5.** Um grafo  $G$  é dito *euleriano* se, para cada vértice, existe um caminho euleriano ligando esse vértice a si mesmo em  $G$ .

Os grafos das Figuras A.2 e A.3 são exemplos de grafos eulerianos.

**Definição A.6.** Um grafo  $G$  será dito *atravessável* se existem dois vértices distintos de  $G$  ligados por um caminho euleriano.

**Exemplo A.7.** O caminho euleriano  $e_4e_1e_3e_2$  liga o vértice 1 ao vértice 2 e o caminho euleriano  $e_2e_3e_1e_4$  liga o vértice 2 ao vértice 1 no grafo atravessável da Figura A.4.

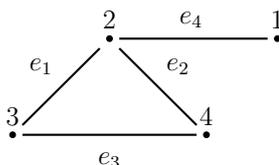


Figura A.4: Grafo atravessável.

**Exemplo A.8.** Existem grafos que não são eulerianos ou atravessáveis. Por exemplo, observe que o grafo da Figura A.5, apesar da sua similaridade com o grafo atravessável da Figura A.4, este não é atravessável e não é euleriano.

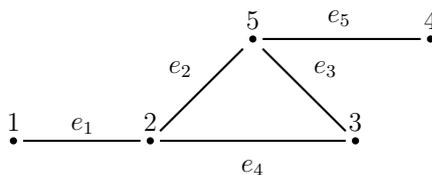


Figura A.5: Exemplo de grafo não euleriano e não atravessável.

A seguir apresentaremos dois resultados clássicos que fornecem condições necessárias e suficientes para a existência de caminhos eulerianos em grafos.

**Teorema A.9.** (Teorema 3.1.1, [34]) *Um grafo conexo  $G$  é euleriano se, e somente se,  $G$  é conexo e todos os seus vértices têm grau par. Consequentemente, todos os caminhos eulerianos existentes em cada um dos vértices de  $G$  são caminhos eulerianos ligando esse vértice a si mesmo.*

**Teorema A.10.** (Teorema 3.1.2, [34]) *Um grafo conexo  $G$  é atravessável se, e somente se,  $G$  é conexo e existem exatamente dois vértices de grau ímpar neste grafo. Em consequência, todos os caminhos eulerianos existentes em  $G$  ligam os dois vértices de grau ímpar do grafo.*

**Observação A.11.** Observe que os teoremas acima nos fornecem que não existem caminhos eulerianos em grafos com apenas um vértice de grau ímpar ou com mais de dois vértices de grau ímpar.

## A.2 Grafos canceladores

Nessa seção introduziremos os conceitos que serão necessários para relacionarmos problemas acerca do grau mínimo de identidades standard de álgebras de matrizes com involução graduada, com problemas provenientes da teoria de grafos.

Ao longo de toda essa seção estaremos supondo que  $G$  é um grafo euleriano ou atravessável. Assim, note que se rotularmos as arestas de  $G$ , isto é, considerarmos  $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$ , então todo caminho euleriano em  $G$  resultará em uma permutação  $e_{\sigma(1)} \cdots e_{\sigma(m)}$ , onde  $\sigma \in S_m$ , das  $m$  arestas de  $G$ . Desse modo, podemos definir o seguinte.

**Definição A.12.** Definimos o sinal de um caminho euleriano  $e_{\sigma(1)} \cdots e_{\sigma(m)}$  no grafo  $G$  como sendo igual ao sinal da permutação  $\sigma$  associada a esse caminho. Portanto, um caminho euleriano será dito positivo se o sinal da permutação associada é igual a 1 e será dito negativo caso contrário.

Por exemplo, no grafo da Figura A.4, temos que  $\text{sgn}(e_4 e_1 e_3 e_2) = \text{sgn}((142)) = 1$  e  $\text{sgn}(e_2 e_3 e_1 e_4) = \text{sgn}((123)) = 1$ . Portanto, esses dois caminhos eulerianos são positivos.

**Definição A.13.** Dizemos que um vértice  $v$  de  $G$  cancela (ou é cancelador), se o número de caminhos eulerianos positivos que iniciam em  $v$  é igual ao número de caminhos eulerianos negativos que iniciam em  $v$ , caso contrário dizemos que  $v$  é não cancelador. No

caso em que todos os vértices de  $G$  são canceladores diremos que o grafo  $G$  cancela ou é cancelador. Caso contrário diremos que  $G$  é não cancelador.

**Exemplo A.14.** Note que no grafo da Figura A.6 os caminhos eulerianos que têm início no vértice 1 são  $e_2e_3e_1$  e  $e_1e_3e_2$ ; os caminhos eulerianos que têm início no vértice 2 são  $e_1e_2e_3$  e  $e_3e_2e_1$ ; e os caminhos eulerianos que têm início no vértice 3 são:  $e_3e_1e_2$  e  $e_2e_1e_3$ . Assim, em cada um dos casos, o sinal dos caminhos eulerianos são, respectivamente, 1 e  $-1$ , ou seja, todos os vértices do grafo abaixo são canceladores. Portanto, o grafo em questão é cancelador.

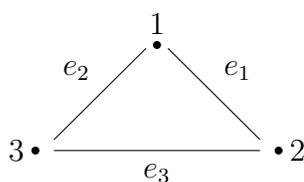


Figura A.6: Exemplo de grafo cancelador.

**Exemplo A.15.** No caso de grafos atravessáveis precisamos apenas garantir que os vértices de grau ímpar são canceladores, uma vez que não existem caminhos eulerianos iniciados nos vértices de grau par. Por exemplo, para garantir que o grafo da Figura A.7 é cancelador, precisamos garantir que os vértices de grau ímpar 1 e 3 são canceladores. De fato, os caminhos eulerianos que têm início no vértice 1 são  $e_1e_2e_3e_4e_5e_6$ ,  $e_5e_4e_3e_2e_1e_6$ ,  $e_1e_2e_6e_5e_4e_3$ ,  $e_5e_4e_3e_6e_1e_2$ ,  $e_6e_3e_4e_5e_1e_2$  e  $e_6e_2e_1e_5e_4e_3$ , enquanto que, os caminhos eulerianos que têm início no vértice 3 são  $e_3e_4e_5e_1e_2e_6$ ,  $e_2e_1e_5e_4e_3e_6$ ,  $e_2e_1e_6e_3e_4e_5$ ,  $e_3e_4e_5e_6e_2e_1$ ,  $e_6e_5e_4e_3e_2e_1$  e  $e_6e_1e_2e_3e_4e_5$ . Em ambos os casos, os sinais dos três primeiros caminhos eulerianos e dos três últimos são, respectivamente, 1 e  $-1$ , ou seja, todos os vértices do grafo em questão são canceladores. Desse modo, esse grafo é cancelador.

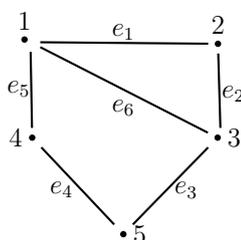


Figura A.7: Exemplo de grafo atravessável e cancelador.

**Definição A.16.** Dois grafos  $G$  e  $H$  são *isomorfos* se existe uma correspondência biunívoca entre os seus conjuntos de vértices,  $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ , que preserva adjacências, isto é,  $\{x, y\}$  é um elemento em  $E(G)$  se, e somente se,  $\{\phi(x), \phi(y)\}$  é um elemento em  $E(H)$ .

Por exemplo, os grafos da Figura A.8 são isomorfos, pois a correspondência  $i \leftrightarrow i + 1$  preserva adjacências.



Figura A.8: Grafos isomorfos.

Agora, note que isomorfismos de grafos preservam caminhos e os sinais desses caminhos. Desse modo, o seguinte ocorre.

**Lema A.17.** *Se dois grafos  $G$  e  $H$  são isomorfos e  $G$  é cancelador, então  $H$  é cancelador.*

As proposições a seguir estabelecerão algumas propriedades importantes sobre grafos canceladores. Comentaremos a demonstração de algumas delas, mas todas as demonstrações podem ser vistas na íntegra em [29].

**Proposição A.18.** *O fato de o grafo  $G$  ser cancelador independe da rotulação estabelecida para as suas arestas.*

**Demonstração.** Se  $G$  for cancelador com uma rotulação de arestas pré-definida, então a mudança de quaisquer duas arestas pré-rotuladas de  $G$ , implica que a permutação associada de um caminho euleriano de  $G$  seja multiplicada por uma transposição na nova rotulação. Portanto, caso a nova rotulação tenha sido obtida a partir de um número ímpar de trocas de pares de arestas, então cada caminho euleriano positivo se torna negativo e vice-versa. No entanto se ela foi obtida a partir de um número par de trocas de pares de arestas, todos os caminhos permanecem com o mesmo sinal. Desse modo, se o grafo era cancelador com a rotulação antiga, significa que o número de caminhos eulerianos negativos nesse grafo era igual ao número de caminhos eulerianos positivos e pelo que vimos a nova rotulação não altera a quantidade de cada um dos caminhos, isto é, o grafo permanece sendo cancelador. ■

**Proposição A.19.** *Se  $G$  tem arestas múltiplas, então  $G$  é cancelador.*

**Demonstração.** Se  $G$  tem arestas múltiplas, então qualquer caminho euleriano em  $G$  pode ser pareado com um caminho euleriano em  $G$  que é idêntico ao caminho considerado, exceto pela troca de duas arestas múltiplas. Assim, os caminhos considerados para formar cada par têm sinais opostos, pois as permutações associadas a eles diferem por uma

transposição. Conseqüentemente, em cada vértice temos o mesmo número de caminhos eulerianos positivos e negativos. Portanto,  $G$  é cancelador. ■

**Proposição A.20.** *Se  $G$  é um grafo com  $m$  arestas, em que todos os seus vértices têm grau par e  $m \equiv 2, 3 \pmod{4}$ , então  $G$  é cancelador.*

**Demonstração.** Seja  $v$  um vértice de  $G$ . Podemos parear um caminho euleriano de  $v$  a  $v$  a um outro caminho euleriano de  $v$  a  $v$  que é obtido revertendo-se o caminho considerado. Agora, observando que ao reverter um caminho euleriano realizamos  $\frac{m(m-1)}{2}$  transposições, então temos que esses caminhos eulerianos pareados têm sinais opostos, pois  $m \equiv 2, 3 \pmod{4}$ . Desse modo, temos o mesmo número de caminhos eulerianos positivos e negativos, de onde segue que o grafo  $G$  é cancelador. ■

**Proposição A.21.** *Seja  $G$  um grafo com  $m$  arestas em que exatamente dois de seus vértices têm grau ímpar. Então,  $G$  é cancelador se, e somente se, um dos vértices de grau ímpar de  $G$  é cancelador.*

**Demonstração.** Obviamente, precisamos provar apenas a recíproca. Deste modo, suponhamos que  $v$  e  $w$  são os dois vértices de grau ímpar de  $G$  e que  $v$  é cancelador. Note que todos os vértices de grau par de  $G$  são automaticamente canceladores, uma vez que nenhum caminho euleriano de  $G$  tem início nesses vértices. Desse modo, precisamos apenas mostrar que o vértice  $w$  é cancelador. Nesse sentido, observe que existe uma correspondência biunívoca entre os caminhos eulerianos que ligam  $w$  a  $v$  com os caminhos eulerianos que ligam  $v$  a  $w$  que é definida revertendo cada um dos caminhos eulerianos. Além disso, podemos observar que ao reverter um caminho euleriano realizamos  $\frac{m(m-1)}{2}$  transposições. Portanto, dependendo do valor de  $m$  módulo 4 os sinais desses caminhos correspondentes são ou sempre iguais, ou sempre opostos. Em todo caso, o número de caminhos eulerianos positivos (negativos) que iniciam em  $w$  é igual ao número de caminhos eulerianos positivos (ou negativos, respectivamente) que iniciam em  $v$ . Assim, como  $v$  é cancelador, segue que  $w$  é cancelador, como queríamos demonstrar. ■

A proposição a seguir estabelece condições necessárias e suficientes para que um grafo  $G$  com um número ímpar de arestas e com todos os seus vértices de grau par seja cancelador.

**Proposição A.22.** *(Lema 2, [29]) Seja  $G$  um grafo que tem todos os seus vértices de*

grau par e tem um número ímpar de arestas. Então,  $G$  é cancelador se, e somente se, pelo menos um de seus vértices é cancelador.

### A.3 Grafos canceladores e identidades standard

Nessa seção iremos expor a origem de associações existentes na literatura entre o problema de determinar o grau mínimo de identidades standard para as álgebras de matrizes (em diversos contextos) com o problema de determinar quando um grafo é ou não cancelador.

Nesse sentido, apresentaremos a associação apontada por Swan em [45] entre a substituição de matrizes elementares em polinômios standard e grafos direcionados. Para tanto, estabeleceremos a seguir a nomenclatura necessária para compreensão do contexto de grafos direcionados.

Um *grafo direcionado finito*  $\Gamma$  consiste em um conjunto finito não vazio  $V(\Gamma)$ , cujos elementos são chamados de vértices e de um multiconjunto  $E(\Gamma)$  de pares *ordenados* de elementos de  $V$ , os quais chamaremos de arestas direcionadas, isto é,

$$E(\Gamma) \subseteq \{(u, v) \mid u, v \in V\}.$$

Nesse caso, por simplicidade, já estamos considerando que o grafo direcionado pode conter laços e arestas direcionadas múltiplas. Além disso, todos os conceitos com respeito a ordem, tamanho, adjacências e graus de vértices definidos para grafos, multigrafos e pseudografos na primeira seção deste capítulo, podem também ser estabelecidos de modo análogo para grafos direcionados ao considerar arestas direcionadas. Definimos também o *fluxo* de um vértice  $v$  como sendo o número de arestas que iniciam em  $v$  menos o número de arestas que terminam em  $v$  (lembrando que laços iniciam e terminam em um mesmo vértice). Por exemplo, o grafo da Figura A.9 é direcionado. A aresta  $e_1$  liga o vértice 1 ao vértice 2;  $e_2$  tem início no vértice 3 e término no vértice 2; o vértice 2 tem grau 3 e o fluxo do vértice 3 é igual a 1.

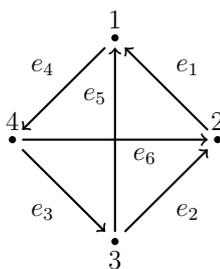


Figura A.9: Grafo direcionado.

**Definição A.23.** Um caminho unicursal que liga um vértice  $v$  a um vértice  $w$  em  $\Gamma$  consiste em uma sequência  $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m}$  de todas as arestas de  $\Gamma$  tal que:

1.  $e_{i_1}$  tem início em  $v$ ;
2.  $e_{i_m}$  tem término em  $w$ ;
3. para  $1 \leq j < m$ , o vértice final de  $e_{i_j}$  é igual ao vértice inicial de  $e_{i_{j+1}}$ .

Intuitivamente, um caminho unicursal que liga  $v$  a  $w$  em um grafo direcionado é um caminho euleriano que liga  $v$  a  $w$  no grafo não direcionado associado, porém respeitando a direção das arestas no grafo direcionado. Assim, fornecendo uma rotulação fixa para as arestas de  $\Gamma$ , isto é, estabelecendo que  $E(\Gamma) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , podemos de modo análogo ao que fizemos para grafos na Seção A.2, definir o sinal de um caminho unicursal  $e_{\sigma(1)}e_{\sigma(2)} \dots e_{\sigma(m)}$ , onde  $\sigma$  é uma permutação em  $S_m$ , como sendo igual ao sinal da permutação  $\sigma$  associada a esse caminho. Portanto, um caminho unicursal será dito positivo se o sinal da permutação associada é igual a 1 e será dito negativo caso contrário.

**Definição A.24.** Diremos que um vértice  $v$  de um grafo direcionado  $\Gamma$  cancela ou é cancelador, se o número de caminhos unicursais positivos que iniciam em  $v$  é igual ao número de caminhos unicursais negativos que iniciam em  $v$ . Caso contrário dizemos que  $v$  é não cancelador. No caso em que todos os vértices de  $\Gamma$  são canceladores diremos que o grafo direcionado  $\Gamma$  cancela ou é cancelador. Caso contrário diremos que  $G$  não é cancelador.

**Exemplo A.25.** Observe que no grafo direcionado da Figura A.10 existem apenas dois caminhos unicursais que têm início no vértice 1, são eles:  $C_1 = e_2e_5e_4e_1e_3$  e  $C_2 = e_3e_4e_1e_2e_5$ . Associados a esses caminhos temos, respectivamente, as permutações  $(12534)$  e  $(13)(24)$  pertencentes a  $S_5$ . Agora, note que essas permutações são ambas pares. Portanto,  $C_1$  e  $C_2$  são ambos caminhos unicursais positivos, e conseqüentemente, o vértice 1 é não cancelador, o que torna  $\Gamma$  um grafo não cancelador.

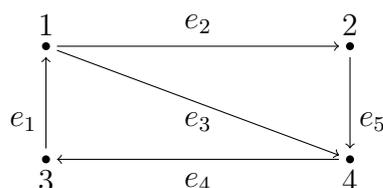


Figura A.10: Exemplo de grafo direcionado cancelador.

O teorema a seguir estabelecido por Swan em [45] determina uma cota inferior para o número de arestas de  $\Gamma$  (em função do número de vértices) para o qual  $\Gamma$  é cancelador.

**Teorema A.26.** (Swan, [45]) *Se  $\Gamma$  é um grafo direcionado conexo com  $n$  vértices e  $m$  arestas com  $m \geq 2n$ , então  $\Gamma$  é cancelador.*

Usando as ferramentas provenientes da teoria de grafos que foram apresentadas nesse apêndice e estabelecidas em [45], Swan mostra que o teorema acima implica no Teorema de Amitsur e Levitzki. A seguir apresentaremos sua demonstração.

**Teorema A.27.** (Amitsur e Levitzki, [2]) *O polinômio standard de grau  $2n$*

$$St_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(2n)}$$

*é uma identidade polinomial para a álgebra de matrizes  $M_n(F)$ .*

**Demonstração.** Consideremos a seguinte associação: para  $1 \leq i, j \leq n$  denote por  $e_{ij}$  a matriz  $n \times n$  elementar sobre  $F$ . Pela Proposição 1.2, para mostrar que  $St_{2n}(x_1, \dots, x_{2n})$  é uma identidade polinomial para  $M_n(F)$ , basta mostrar que  $St_{2n}(x_1, \dots, x_{2n})$  se anula sob quaisquer substituições de  $2n$  matrizes  $n \times n$  elementares distintas. Desse modo, considerando uma substituição  $S = \{A_1, \dots, A_{2n}\}$ , em que  $A_1, \dots, A_{2n}$  são todas matrizes elementares. Associamos a  $S$  um grafo direcionado  $\Gamma(S) = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ , em que  $V(\Gamma) = \{1, \dots, n\}$  é o conjunto de vértices e  $E(\Gamma)$  tem uma aresta direcionada  $e_i = (k, l)$  para cada matriz elementar  $A_i = e_{kl}$  da substituição  $S$ . Como  $\#E(\Gamma) = 2n = 2\#V(\Gamma)$ , segue do Teorema A.26 que  $\Gamma(S)$  é cancelador.

Por outro lado, a regra de multiplicação de matrizes elementares nos mostra que a matriz resultante do produto  $A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(2n)}$ , onde  $\sigma \in S_{2n}$ , é uma matriz elementar não nula  $e_{ij}$  se, e somente se, a sequência  $e_{\sigma(1)} \dots e_{\sigma(2n)}$  de arestas direcionadas correspondentes for um caminho unicursal ligando o vértice  $i$  a  $j$  em  $\Gamma(S)$ . Ademais, como em  $St_{2n}(A_1, \dots, A_{2n})$  estamos multiplicando cada um dos produtos  $A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(2n)}$  pelo sinal da permutação  $\sigma$ , cada termo possui o mesmo sinal do caminho unicursal correspondente. Como  $\Gamma(S)$  é cancelador, temos que  $St_{2n}(A_1, \dots, A_{2n})$  é uma matriz nula. ■

A fim de ilustrar a associação e a implicação discutidas acima, iremos usá-las em um exemplo específico.

**Exemplo A.28.** Iremos mostrar que  $St_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv 0$  em  $M_2(F)$ . Recordemos que  $M_2(F) = \text{span}_F\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ , desse modo, usando a Proposição 1.2, precisamos apenas mostrar que  $St_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$  se anula sob a substituição  $S$  dada por  $x_1 = e_{11}$ ,

$x_2 = e_{12}$ ,  $x_3 = e_{21}$  e  $x_4 = e_{22}$ . Associamos a essa substituição o grafo direcionado  $\Gamma(S)$ , em que  $V(\Gamma) = \{1, 2\}$ ,  $E(\Gamma) = \{e_1 = (1, 1), e_2 = (1, 2), e_3 = (2, 1), e_4 = (2, 2)\}$  e cuja representação é dada na Figura A.11 abaixo.

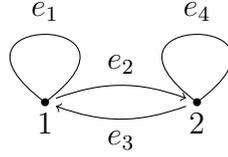


Figura A.11: Grafo direcionado.

Agora, podemos ver que os únicos monômios de  $St_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$  que são não nulos sob a substituição  $S$  são os monômios:  $x_1x_2x_4x_3$ ,  $x_2x_4x_3x_1$ ,  $x_3x_1x_2x_4$ , e  $x_4x_3x_1x_2$  e, de fato, as seqüências de arestas  $e_1e_2e_4e_3$ ,  $e_2e_4e_3e_1$ ,  $e_3e_1e_2e_4$  e  $e_4e_3e_1e_2$  são os únicos caminhos unicursais no grafo direcionado  $\Gamma(S)$ . Além disso, observe que os dois primeiros caminhos unicursais ligam o vértice 1 ao vértice 1 e que os dois últimos ligam o vértice 2 ao vértice 2. Por sua vez, esses caminhos estão associados, respectivamente, às permutações  $(34)$ ,  $(124)$ ,  $(132)$  e  $(1423)$  (que também são as permutações associadas aos monômios não nulos). Desse modo, podemos ver que o vértice 1 e o vértice 2 são canceladores e portanto o grafo  $\Gamma(S)$  é cancelador. Em seguida, constatando que a soma dos sinais dos caminhos unicursais de 1 a 1 (resp. 2 a 2) em  $\Gamma(S)$  é igual a soma dos sinais das permutações associadas aos monômios que resultam em  $e_{11}$  (resp.  $e_{22}$ ) em  $St_4(e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$ , podemos concluir a partir do fato de  $\Gamma(S)$  ser cancelador que a matriz  $St_4(e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$  é nula.

Inspirados pela associação estabelecida por Swan e por associações análogas entre matrizes do contexto da involução transposta e grafos que contêm tanto arestas direcionadas quanto arestas não direcionadas (apontadas por Hutchinson [29] e Owens [35]), usaremos associações (que estão melhor explicadas ao longo do texto) entre matrizes do contexto de involuções graduadas com grafos não direcionados.

Grosso modo, em alguns resultados, para demonstrar que um determinado  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -polinômio standard em variáveis pares (ou ímpares) simétricas não é uma  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidade para uma  $*$ -superálgebra de matrizes com involução (transposta ou simplética), vamos mostrar que o grafo associado a uma substituição específica por matrizes simétricas não é cancelador. Por outro lado, se quisermos mostrar que tal polinômio standard é uma  $(\mathbb{Z}_2, *)$ -identidade para a  $*$ -superálgebra de matrizes então mostraremos que para cada substituição possível por elementos da base do espaço considerado, o grafo associado é cancelador.

# Apêndice B

## Demonstração do Teorema 2.15

O objetivo deste capítulo será demonstrar o Teorema 2.15 discutido ao longo da tese. Por conveniência, a seguir o enunciamos novamente.

Seja  $H(S'_{(k,l)})$  o grafo conexo definido da seguinte maneira:  $H(S'_{(k,l)}) = (V(H), E(H))$ , onde  $V(H) = \{1, \dots, k, k+1, \dots, k+l\}$  e  $E(H) = \{f_1, \dots, f_{2k+2l-4}\}$ , em que

- $f_i = \{i, k+1\}$  e  $f_{k+i} = \{i, k+2\}$ , para todo  $1 \leq i \leq k$ ;
- $f_{2i-5} = \{1, i\}$  e  $f_{2i-4} = \{i, k\}$ , para todo  $k+3 \leq i \leq k+l$ .

Como vimos esse grafo pode ser representado através do diagrama da Figura B.1.

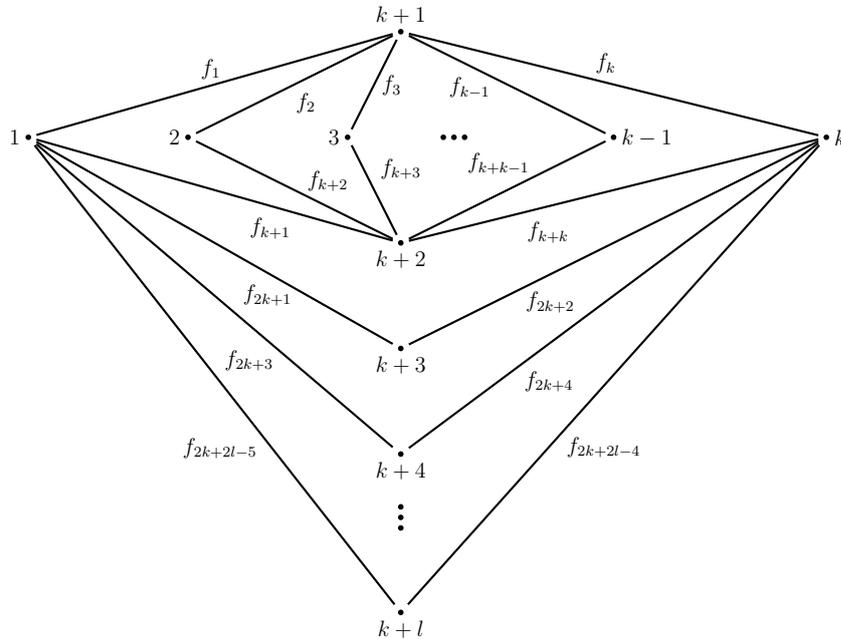


Figura B.1: Grafo  $H(S'_{(k,l)})$ .

Dessa forma, estamos interessados em demonstrar o seguinte teorema.

**Teorema B.1.** *O grafo  $H(S'_{(k,l)}) = (V(H), E(H))$  é não cancelador, para todo  $k \geq 3$  par e  $l \geq 3$ .*

Para demonstrar que  $H(S'_{(k,l)})$  é não cancelador iremos inicialmente considerar que  $l$  é ímpar. Feito isso, iremos seguir os seguintes passos: começaremos identificando os conjuntos de caminhos eulerianos que ligam o vértice 1 ao vértice  $k$  no grafo  $H(S'_{(k,l)})$ , de modo a obtermos todos os caminhos eulerianos que ligam o vértice 1 ao vértice  $k$ ; posteriormente, iremos verificar o sinal desses caminhos em cada um desses conjuntos, para então calcular a quantidade desses caminhos que são positivos e a quantidade que são negativos; por fim, veremos que o número de caminhos eulerianos positivos que ligam o vértice 1 ao vértice  $k$  é diferente do número de caminhos eulerianos negativos que ligam esses vértices. Desse modo, teremos que o grafo  $H(S'_{(k,l)})$  é não cancelador.

Isso posto, começamos estabelecendo os resultados a seguir com respeito a caminhos no subgrafo diamante  $D_{2k}^{k+1,k+2} = (V(D), E(D))$ , onde  $V(D) = \{1, \dots, k+1, k+2\}$  e  $E(D) = \{f_1, \dots, f_{2k}\}$ . Denotaremos por  $P_{(m,n)}^{(j)}$  um caminho de comprimento  $j$  no subgrafo diamante  $D_{2k}^{k+1,k+2}$  ligando o vértice  $m$  ao vértice  $n$ , com  $m, n \in \{1, k\}$ .

**Lema B.2.** *O comprimento de qualquer caminho ligando o vértice 1 a ele mesmo em  $D_{2k}^{k+1,k+2}$  é congruente a 0 módulo 4.*

**Demonstração.** Seja  $P_{(1,1)}^{(j)}$  um caminho com  $j$  arestas ligando o vértice 1 a ele mesmo em  $D_{2k}^{k+1,k+2}$ . Pode-se ver que esse caminho é de uma das seguintes formas:

- $f_1 f_{i_1} f_{k+i_1} f_{k+i_2} f_{i_2} f_{i_3} f_{k+i_3} \dots f_{i_s} f_{k+i_s} f_{k+1}$ ;
- $f_{k+1} f_{k+i_1} f_{i_1} f_{i_2} f_{k+i_2} f_{k+i_3} f_{i_3} \dots f_{k+i_s} f_{i_s} f_1$ ,

onde  $i_1, i_2, i_3, \dots, i_s \in \{2, 3, \dots, k\}$  e  $s = \frac{j-2}{2}$ . Note que nos dois casos  $s$  tem que ser um número ímpar, pois no primeiro caso para acessar a aresta  $f_{k+1}$  temos que necessariamente terminar com o par  $f_{i_s} f_{k+i_s}$ . Por sua vez, esse tipo de par ( $f_{i_t}$  antecedendo  $f_{k+i_t}$ ) aparece nesse caminho apenas com subíndices ímpares. Já no segundo caminho para acessar a aresta  $f_1$  temos que terminar com o par  $f_{k+i_s} f_{i_s}$ , novamente esses pares aparecem apenas com subíndices ímpares. Assim, temos  $s$  ímpar e portanto  $j \equiv 0 \pmod{4}$ . ■

A demonstração do lema a seguir pode ser feita de modo análogo a demonstração do lema anterior.

**Lema B.3.** *O comprimento de qualquer caminho ligando o vértice  $k$  a ele mesmo em  $D_{2k}^{k+1,k+2}$  é congruente a 0 módulo 4.*

**Lema B.4.** *O comprimento de qualquer caminho ligando o vértice 1 ao vértice  $k$  em  $D_{2k}^{k+1,k+2}$  é congruente ou a 0 ou a 2 módulo 4.*

**Demonstração.** Seja  $P_{(1,k)}^{(j)}$  um caminho com  $j$  arestas ligando o vértice 1 ao vértice  $k$  em  $D_{2k}^{k+1,k+2}$ . Pode-se observar que esse caminho é de uma das seguintes formas:

- $f_1 f_{i_1} f_{k+i_1} f_{k+i_2} f_{i_2} f_{i_3} f_{k+i_3} \cdots f_{i_{\frac{j-2}{2}}} f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}} f_{2k}$ ;
- $f_{k+1} f_{k+i_1} f_{i_1} f_{i_2} f_{k+i_2} f_{k+i_3} f_{i_3} \cdots f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}} f_{i_{\frac{j-2}{2}}} f_k$ ;
- $f_1 f_{i_1} f_{k+i_1} f_{k+i_2} f_{i_2} f_{i_3} f_{k+i_3} \cdots f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}} f_{i_{\frac{j-2}{2}}} f_k$ ;
- $f_{k+1} f_{k+i_1} f_{i_1} f_{i_2} f_{k+i_2} f_{k+i_3} f_{i_3} \cdots f_{i_{\frac{j-2}{2}}} f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}} f_{2k}$ ,

em que  $i_1, i_2, i_3, \dots, i_{\frac{j-2}{2}} \in \{2, 3, \dots, k-2\}$  e  $\frac{j-2}{2}$  é ímpar nos dois primeiros caminhos (já que no primeiro caminho para acessar a aresta  $f_{2k}$  temos que necessariamente terminar com o par  $f_{i_{\frac{j-2}{2}}} f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}}$  e esses pares ocorrem apenas com subíndices ímpares, e no segundo caminho para acessar a aresta  $f_k$  temos que terminar com o par  $f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}} f_{i_{\frac{j-2}{2}}}$  que ocorrem no segundo caminho com subíndices ímpares) e é par no caso dos dois últimos caminhos (basta fazer a mesma análise feita no caso ímpar). Desse modo, no caso em que  $\frac{j-2}{2}$  é ímpar, temos que  $j \equiv 0 \pmod{4}$  e no caso em que  $\frac{j-2}{2}$  é par, temos  $j \equiv 2 \pmod{4}$ . ■

A demonstração do lema a seguir pode ser feita de modo análogo a demonstração do lema anterior.

**Lema B.5.** *O comprimento de um caminho ligando o vértice  $k$  ao vértice 1 em  $D_{2k}^{k+1,k+2}$  é congruente ou a 0 ou a 2 módulo 4.*

Em seguida, descreveremos todos os caminhos eulerianos ligando 1 a  $k$  no grafo  $H(S'_{(k,l)})$ . Para isso, denotaremos por  $C_i$  o caminho  $f_{2k+2i-1} f_{2k+2i}$ , para todo  $1 \leq i \leq l-2$ . Note que esses caminhos têm comprimento 2 e ligam o vértice 1 ao vértice  $k$  em  $H(S'_{(k,l)})$ . Denotaremos ainda por  $C_i^{-1} = f_{2k+2i} f_{2k+2i-1}$ , com  $1 \leq i \leq l-2$ , o inverso desses caminhos que ligam o vértice  $k$  ao vértice 1 ( $C_0, C_0^{-1}, C_{l-1}$  e  $C_{l-1}^{-1}$  denotarão caminhos vazios).

Além disso, denotaremos por  $RP_{(m',n')}^{(2k-j)}$  o complementar em  $D_{2k}^{k+1,k+2}$  do caminho  $P_{(m,n)}^{(j)}$  ligando o vértice  $m'$  ao vértice  $n'$ , isto é, o caminho que percorre todas as  $2k-j$  arestas distintas que não foram percorridas pelo caminho anterior em  $D_{2k}^{k+1,k+2}$  e que liga o vértice  $m'$  ao vértice  $n'$  de tal modo que  $\{m', n', m, n\} = \{1, 1, k, k\}$ . Por exemplo,  $RP_{(k,k)}^{(2k-j)}$  denota o caminho complementar ao caminho  $P_{(1,1)}^{(j)}$  se  $RP_{(k,k)}^{(2k-j)}$  percorre todas as  $2k-j$  arestas distintas em  $D_{2k}^{k+1,k+2}$  que não foram percorridas pelo caminho  $P_{(1,1)}^{(j)}$  e liga o vértice  $k$  a si mesmo.

Assim, usamos os lemas acima e as notações pré-estabelecidas para definir os seguintes conjuntos:

$$M_{(r)}^{(2k,0)} = C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)}C_{\sigma(4)}^{-1}\cdots C_{\sigma(r-1)}^{-1}P_{(1,1)}^{(2k)}C_{\sigma(r)}\cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)},$$

onde  $r \in \{1, 3, 5, \dots, l-2\}$ ;

$$M_{(r)}^{(0,2k)} = C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)}C_{\sigma(4)}^{-1}\cdots C_{\sigma(r)}P_{(k,k)}^{(2k)}C_{\sigma(r+1)}^{-1}\cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)},$$

onde  $r \in \{1, 3, 5, \dots, l-2\}$ ;

$$M_{(r,s)}^{(j,2k-j)} = C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}\cdots C_{\sigma(r-1)}^{-1}P_{(1,1)}^{(j)}C_{\sigma(r)}\cdots C_{\sigma(s)}RP_{(k,k)}^{(2k-j)}C_{\sigma(s+1)}^{-1}\cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)},$$

onde  $r \in \{1, 3, 5, \dots, l-2\}$ ,  $s \in \{1, 3, 5, \dots, l-2\}$  e  $j = 4t$ , com  $1 \leq t \leq \frac{k-2}{2}$ ;

É importante observar que no conjunto acima cometemos um abuso na notação  $RP_{(k,k)}^{(2k-j)}$  para incluir também nesses conjuntos aqueles caminhos que ligam primeiramente o vértice  $k$  ao vértice  $k$  no subgrafo diamante e posteriormente o vértice 1 ao vértice 1.

$$N_{(r,s)}^{(j,2k-j)} = C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}\cdots C_{\sigma(r)}^{-1}P_{(1,k)}^{(j)}C_{\sigma(r+1)}^{-1}\cdots C_{\sigma(s)}^{-1}RP_{(1,k)}^{(2k-j)}C_{\sigma(s+1)}^{-1}\cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)},$$

onde  $r \in \{0, 2, 4, \dots, l-3\}$ ,  $s \in \{r+1, r+3, r+5, \dots, l-2\}$  e  $j = 2t$ , com  $1 \leq t \leq k-1$ ;

$$O_{(r,s)}^{(j,2k-j)} = C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}\cdots C_{\sigma(r)}^{-1}P_{(1,k)}^{(j)}C_{\sigma(r+1)}^{-1}\cdots C_{\sigma(s)}RP_{(k,1)}^{(2k-j)}C_{\sigma(s+1)}\cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)},$$

onde  $r \in \{0, 2, 4, \dots, l-5\}$ ,  $s \in \{r+2, r+4, r+6, \dots, l-3\}$  e  $j = 2t$ , com  $1 \leq t \leq k-1$ ;

$$P_{(r,s)}^{(j,2k-j)} = C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}\cdots C_{\sigma(r)}P_{(k,1)}^{(j)}C_{\sigma(r+1)}\cdots C_{\sigma(s)}^{-1}RP_{(1,k)}^{(2k-j)}C_{\sigma(s+1)}^{-1}\cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)},$$

onde  $r \in \{1, 3, 5, \dots, l-4\}$ ,  $s \in \{r+2, r+4, r+6, \dots, l-2\}$  e  $j = 2t$ , com  $1 \leq t \leq k-1$ ;

$$Q_{(r,s)}^{(j,2k-j)} = C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}\cdots C_{\sigma(r)}P_{(k,1)}^{(j)}C_{\sigma(r+1)}\cdots C_{\sigma(s)}RP_{(k,1)}^{(2k-j)}C_{\sigma(s+1)}\cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)},$$

onde  $r \in \{1, 3, 5, \dots, l-4\}$ ,  $s \in \{r+1, r+3, \dots, l-3\}$  e  $j = 2t$ , com  $1 \leq t \leq k-1$ .

**Lema B.6.** *Os conjuntos definidos acima descrevem todos os caminhos eulerianos de 1 a  $k$  em  $H(S'_{(k,l)})$ .*

**Demonstração.** De fato, note que, pela definição dos conjuntos acima, qualquer caminho pertencente a um desses conjuntos é um caminho euleriano de 1 a  $k$  em  $H(S'_{(k,l)})$ . Por outro lado, pode-se observar que um caminho euleriano de 1 a  $k$  em  $H(S'_{(k,l)})$  consiste em uma sequência de caminhos que intercalam, de modo apropriado, os caminhos  $C$ 's e

$C^{-1}$ 's de comprimento 2 com no máximo dois caminhos disjuntos do subgrafo diamante  $D_{2k}^{k+1,k+2}$  (isto é, caminhos sem arestas em comum). Isso pode ser visto observando que o grau do vértice 1 e o grau do vértice  $k$  no subgrafo diamante são ambos iguais a 2 e portanto podemos visitar o subgrafo diamante no máximo 2 vezes. Além do mais, a união disjunta dos conjuntos de arestas dos caminhos percorridos em cada uma dessas visitas tem que ser igual ao conjunto de todas as arestas do subgrafo  $D_{2k}^{k+1,k+2}$ . Desse modo, um caminho euleriano de 1 a  $k$  em  $H(S'_{(k,l)})$  pertence a um dos conjuntos definidos acima. ■

A seguir, obtemos os sinais de todos os caminhos eulerianos de 1 a  $k$  em  $H(S'_{(k,l)})$ . Para tanto, estabeleceremos uma sequência de lemas fornecendo o sinal dos caminhos em cada um dos conjuntos definidos acima. As demonstrações desses lemas serão feitas usando as observações que faremos a seguir e a mesma abordagem utilizada no final da demonstração do Teorema 2.13.

**Observação B.7.** O total de transposições realizadas por um par de arestas consecutivas sempre é par e portanto em nada afetará o sinal de um caminho euleriano. Em particular, quaisquer transposições realizadas nos caminhos  $C$ 's e  $C^{-1}$ 's não afetam o sinal do caminho euleriano.

**Observação B.8.** A transposição das arestas do caminho  $C_i^{-1} = f_{2k+2i}f_{2k+2i-1}$  gera o caminho  $C_i = f_{2k+2i-1}f_{2k+2i}$ , para todo  $1 \leq i \leq l-2$ , e vice-versa. Naturalmente essas transposições devem ser computadas no cálculo do sinal.

**Observação B.9.** Dados distintos  $i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}}, u_1, \dots, u_{\frac{2k-j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\}$ , o número de transposições necessárias para organizarmos a sequência de arestas

$$f_{i_1}f_{i_2}f_{i_3} \cdots f_{i_{\frac{j-2}{2}}}f_{u_1}f_{u_2} \cdots f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}}$$

em  $f_2f_3 \cdots f_{k-1}$  é o mesmo número de transposições necessárias para organizarmos a sequência de arestas

$$f_{k+i_1}f_{k+i_2} \cdots f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}}f_{k+u_1}f_{k+u_2} \cdots f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}}$$

em  $f_{k+2}f_{k+3} \cdots f_{k+k-1}$ .

**Lema B.10.** Os caminhos pertencentes aos conjuntos  $M_{(r)}^{(2k,0)}$ , onde  $r \in \{1, 3, 5, \dots, l-2\}$ , têm o mesmo sinal e esse sinal é dado por  $(-1)^{\frac{l-1}{2}}$ .

**Demonstração.** Observe que cada caminho em  $M_{(r)}^{(2k,0)}$  é de uma das seguintes formas:

- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)}\cdots f_1f_{\tau(2)}f_{k+\tau(2)}f_{k+\tau(3)}f_{\tau(3)}\cdots f_{\tau(k)}f_{k+\tau(k)}f_{k+1}C_{\sigma(r)}\cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}$ ,  
onde  $\sigma \in S_{l-2}$  e  $\tau \in S_{k-1}\{2, 3, \dots, k\}$ ;
- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)}\cdots f_{k+1}f_{k+\tau(2)}f_{\tau(2)}f_{\tau(3)}f_{k+\tau(3)}\cdots f_{k+\tau(k)}f_{\tau(k)}f_1C_{\sigma(r)}\cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}$   
onde  $\sigma \in S_{l-2}$  e  $\tau \in S_{k-1}\{2, 3, \dots, k\}$ .

Computando o sinal dos caminhos do primeiro tipo, temos

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{sgn}(C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)}\cdots C_{\sigma(r-1)}^{-1}f_1f_{\tau(2)}f_{k+\tau(2)}f_{k+\tau(3)}f_{\tau(3)}\cdots f_{\tau(k)}f_{k+\tau(k)}f_{k+1}C_{\sigma(r)}\cdots \\
 & \quad C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}) \\
 &= \operatorname{sgn}(f_1f_{\tau(2)}f_{k+\tau(2)}f_{k+\tau(3)}f_{\tau(3)}\cdots f_{\tau(k)}f_{k+\tau(k)}f_{k+1}C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)}\cdots C_{\sigma(r-1)}^{-1}C_{\sigma(r)}\cdots \\
 & \quad C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}) \quad (\text{Observação B.7}) \\
 &= (-1)^{\frac{l-3}{2}} \operatorname{sgn}(f_1f_{\tau(2)}f_{k+\tau(2)}f_{k+\tau(3)}f_{\tau(3)}\cdots f_{\tau(k)}f_{k+\tau(k)}f_{k+1}C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}C_{\sigma(3)}\cdots C_{\sigma(r-1)} \\
 & \quad C_{\sigma(r)}\cdots C_{\sigma(l-3)}C_{\sigma(l-2)}) \quad (\text{Observação B.8}) \\
 &= (-1)^{\frac{l-3}{2}} \operatorname{sgn}(f_1f_{\tau(2)}f_{k+\tau(2)}f_{k+\tau(3)}\underbrace{f_{\tau(3)}f_{\tau(4)}\cdots f_{\tau(k-1)}f_{\tau(k)}}_{\text{Observação B.7}}f_{k+\tau(k)}f_{k+1}C_1C_2C_3\cdots C_{r-1} \\
 & \quad C_r\cdots C_{l-3}C_{l-2}) \quad (\text{Observação B.7}) \\
 &= (-1)^{\frac{l-3}{2}} \operatorname{sgn}(f_1f_{\tau(2)}f_{\tau(3)}f_{\tau(4)}\cdots f_{\tau(k-1)}f_{\tau(k)}f_{k+\tau(2)}f_{k+\tau(3)}\cdots f_{k+\tau(k)}\underbrace{f_{k+1}}_{\text{Observação B.7}}C_1C_2C_3\cdots C_{r-1} \\
 & \quad C_r\cdots C_{l-3}C_{l-2}) \quad (\text{Observação B.7}) \\
 &= (-1)^{\frac{l-3}{2}}(-1)^{k-1} \operatorname{sgn}(f_1f_{\tau(2)}\cdots f_{\tau(k-1)}f_{\tau(k)}f_{k+1}f_{k+\tau(2)}f_{k+\tau(3)}\cdots f_{k+\tau(k)}C_1C_2C_3\cdots C_{r-1} \\
 & \quad C_r\cdots C_{l-3}C_{l-2}) \\
 &= (-1)^{\frac{l-3}{2}}(-1)^{k-1}(\operatorname{sgn}\tau)^2 \operatorname{sgn}(f_1f_2\cdots f_{k-1}f_kf_{k+1}f_{k+2}f_{k+3}\cdots f_{2k}f_{2k+1}f_{2k+2}f_{2k+3}f_{2k+4} \\
 & \quad f_{2k+2l-5}f_{2k+2l-4}) \quad (\text{Observação B.9}) \\
 &= (-1)^{\frac{l-1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Em sequência, para computar o sinal dos caminhos eulerianos do segundo tipo, procederemos de forma análoga ao caso anterior através das seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{sgn}(C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)}\cdots C_{\sigma(r-1)}^{-1}f_{k+1}f_{k+\tau(2)}f_{\tau(2)}f_{\tau(3)}f_{k+\tau(3)}\cdots f_{k+\tau(k)}f_{\tau(k)}f_1C_{\sigma(r)}\cdots \\
 & \quad C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}) \\
 &= (-1)^{\frac{l-3}{2}}(-1)(\operatorname{sgn}\tau)^2 \operatorname{sgn}(f_1f_2\cdots f_{k-1}f_kf_{k+1}f_{k+2}f_{k+3}\cdots f_{2k}f_{2k+1}f_{2k+2}f_{2k+3}f_{2k+4} \\
 & \quad f_{2k+2l-5}f_{2k+2l-4}) \\
 &= (-1)^{\frac{l-1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Desse modo, concluímos que todos os caminhos eulerianos em  $M_{(r)}^{(2k,0)}$  têm o mesmo sinal e esse sinal é igual a  $(-1)^{\frac{l-1}{2}}$ . Além disso, como o cálculo acima independe de  $r$ , temos

que todos os caminhos pertencentes aos conjuntos  $M_{(r)}^{(2k,0)}$ , onde  $r \in \{1, 3, 5, \dots, l-2\}$ , têm o mesmo sinal dado por  $(-1)^{\frac{l-1}{2}}$ . ■

**Lema B.11.** *Os caminhos pertencentes aos conjuntos  $M_{(r)}^{(0,2k)}$ , onde  $r \in \{1, 3, 5, \dots, l-2\}$ , têm o mesmo sinal e esse sinal é dado por  $(-1)^{\frac{l-1}{2}}$ .*

**Demonstração.** A demonstração desse lema pode ser feita observando-se que cada caminho em  $M_{(s)}^{(0,2k)}$  é de uma das seguintes formas

- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)} \cdots f_k f_{\tau(1)} f_{k+\tau(1)} f_{k+\tau(2)} \cdots f_{\tau(k-1)} f_{k+\tau(k-1)} f_{2k} C_{\sigma(s)} \cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1} C_{\sigma(l-2)}$ ,  
onde  $\sigma \in S_{l-2}$  e  $\tau \in S_{k-1}\{1, 2, \dots, k-1\}$ ;
- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)} \cdots f_{2k} f_{k+\tau(1)} f_{\tau(1)} f_{\tau(2)} \cdots f_{k+\tau(k-1)} f_{\tau(k-1)} f_k C_{\sigma(s)} \cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1} C_{\sigma(l-2)}$   
onde  $\sigma \in S_{l-2}$  e  $\tau \in S_{k-1}\{1, 2, \dots, k-1\}$ .

Em seguida, utilizando as Observações B.7, B.8, B.9, os cálculos dos sinais desses caminhos podem ser feitos usando argumentos semelhantes aos utilizados no lema anterior. Procedendo dessa forma, obtemos que todos os caminhos pertencentes aos conjuntos  $M_{(r)}^{(0,2k)}$ , onde  $r \in \{1, 3, 5, \dots, l-2\}$ , têm o mesmo sinal e esse sinal é dado por  $(-1)^{\frac{l-1}{2}}$ . ■

**Lema B.12.** *Os caminhos pertencentes aos conjuntos  $M_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$ , onde  $r \in \{1, 3, \dots, l-2\}$ ,  $s \in \{1, 3, \dots, l-2\}$  e  $j = 4t$ , com  $1 \leq t \leq \frac{k-2}{2}$ , têm o mesmo sinal e esse sinal é dado por  $(-1)^{\frac{l+1}{2}}$ .*

**Demonstração.** Note que cada caminho em  $M_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$  é de uma das seguintes formas

- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)} \cdots C_{\sigma(r-1)}^{-1} f_1 f_{i_1} f_{k+i_1} f_{k+i_2} f_{i_2} \cdots f_{i_{\frac{j-2}{2}}} f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}} f_{k+1} C_{\sigma(r)}$   
 $\cdots C_{\sigma(s)} f_k f_{u_1} f_{k+u_1} f_{k+u_2} f_{u_2} \cdots f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}} f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}} f_{2k} C_{\sigma(s+1)}^{-1} \cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1} C_{\sigma(l-2)}$ ,  
onde  $i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\}$  e  $u_1, \dots, u_{\frac{2k-j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}}\}$ ;
- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)} \cdots C_{\sigma(r-1)}^{-1} f_{k+1} f_{k+i_1} f_{i_1} f_{i_2} f_{k+i_2} \cdots f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}} f_{i_{\frac{j-2}{2}}} f_1 C_{\sigma(r)}$   
 $\cdots C_{\sigma(s)} f_k f_{u_1} f_{k+u_1} f_{k+u_2} f_{u_2} \cdots f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}} f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}} f_{2k} C_{\sigma(s+1)}^{-1} \cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1} C_{\sigma(l-2)}$ ,  
onde  $i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\}$  e  $u_1, \dots, u_{\frac{2k-j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}}\}$ ;
- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)} \cdots C_{\sigma(r-1)}^{-1} f_1 f_{i_1} f_{k+i_1} f_{k+i_2} f_{i_2} \cdots f_{i_{\frac{j-2}{2}}} f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}} f_{k+1} C_{\sigma(r)}$   
 $\cdots C_{\sigma(s)} f_{2k} f_{k+u_1} f_{u_1} f_{u_2} f_{k+u_2} \cdots f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}} f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}} f_k C_{\sigma(s+1)}^{-1} \cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1} C_{\sigma(l-2)}$ ,  
onde  $i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\}$  e  $u_1, \dots, u_{\frac{2k-j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}}\}$ ;

- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)}\cdots C_{\sigma(r-1)}^{-1}f_{k+1}f_{k+i_1}f_{i_1}f_{i_2}f_{k+i_2}\cdots f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}}f_{i_{\frac{j-2}{2}}}f_1C_{\sigma(r)}\cdots C_{\sigma(s)}f_2k f_{k+u_1}f_{u_1}f_{u_2}f_{k+u_2}\cdots f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_kC_{\sigma(s+1)}^{-1}\cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}$ ,  
onde  $i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\}$  e  $u_1, \dots, u_{\frac{2k-j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}}\}$ ;

Computando o sinal dos caminhos do primeiro tipo, temos

$$\begin{aligned}
 & \text{sgn}(C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)}\cdots C_{\sigma(r-1)}^{-1}f_1f_{i_1}f_{k+i_1}f_{k+i_2}f_{i_2}\cdots f_{i_{\frac{j-2}{2}}}f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}}f_{k+1}C_{\sigma(r)}\cdots C_{\sigma(s)} \\
 & \quad f_k f_{u_1} f_{k+u_1} f_{k+u_2} f_{u_2} \cdots f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}} f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}} f_{2k} C_{\sigma(s+1)}^{-1} \cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1} C_{\sigma(l-2)}) \\
 &= \text{sgn}(f_1 f_{i_1} f_{k+i_1} f_{k+i_2} f_{i_2} \cdots f_{i_{\frac{j-2}{2}}} f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}} f_{k+1} f_k f_{u_1} f_{k+u_1} f_{k+u_2} f_{u_2} \cdots f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}} f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}} f_{2k} \\
 & \quad C_{\sigma(1)} C_{\sigma(2)}^{-1} C_{\sigma(3)} \cdots C_{\sigma(r-1)}^{-1} C_{\sigma(r)} \cdots C_{\sigma(s)} C_{\sigma(s+1)}^{-1} \cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1} C_{\sigma(l-2)}) \quad (\text{Observação B.7}) \\
 &= (-1)^{\frac{l-3}{2}} \text{sgn}(f_1 f_{i_1} f_{k+i_1} f_{k+i_2} f_{i_2} f_{i_3} \cdots f_{i_{\frac{j-2}{2}}} f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}} f_{k+1} f_k f_{u_1} f_{k+u_1} f_{k+u_2} f_{u_2} \cdots \\
 & \quad f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}} f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}} f_{2k} C_{\sigma(1)} C_{\sigma(2)} \cdots C_{\sigma(r-1)} C_{\sigma(r)} \cdots C_{\sigma(l-3)} C_{\sigma(l-2)}) \quad (\text{Observação B.8}) \\
 &= (-1)^{\frac{l-3}{2}} \text{sgn}(f_1 f_{i_1} f_{k+i_1} f_{k+i_2} \underbrace{f_{i_2} f_{i_3}} \cdots \underbrace{f_{i_{\frac{j-4}{2}}} f_{i_{\frac{j-2}{2}}}} f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}} \underbrace{f_{k+1} f_k} f_{u_1} f_{k+u_1} f_{k+u_2} \underbrace{f_{u_2} f_{u_3}} \\
 & \cdots f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}} f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}} f_{2k} C_1 C_2 C_3 \cdots C_{r-1} C_r \cdots C_{l-3} C_{l-2}) \quad (\text{Observação B.7}) \\
 &= (-1)^{\frac{l-3}{2}} \text{sgn}(f_1 f_{i_1} f_{i_2} f_{i_3} \cdots f_{i_{\frac{j-2}{2}}} f_{k+1} f_k f_{k+i_1} f_{k+i_2} \cdots f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}} \underbrace{f_{u_1} f_{u_2} \cdots f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}}} \\
 & \quad f_{k+u_1} f_{k+u_2} \cdots f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}} f_{2k} C_1 C_2 \cdots C_{r-1} C_r \cdots C_{l-3} C_{l-2}) \quad (\text{Observação B.7}) \\
 &= (-1)^{\frac{l-3}{2}} (-1)^{\binom{\frac{j-2}{2}+2}{2}} \text{sgn}(f_1 f_{i_1} f_{i_2} f_{i_3} \cdots f_{i_{\frac{j-2}{2}}} f_{u_1} f_{u_2} \cdots f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}} f_{k+1} f_k \\
 & \quad f_{k+i_1} f_{k+i_2} \cdots f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}} f_{k+u_1} f_{k+u_2} \cdots f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}} f_{2k} C_1 C_2 \cdots C_{r-1} C_r \cdots C_{l-3} C_{l-2}) \\
 &= (-1)^{\frac{l-3}{2}} (-1)^{\binom{\frac{j-2}{2}+2}{2}} (-1) \text{sgn}(f_1 f_{i_1} f_{i_2} f_{i_3} \cdots f_{i_{\frac{j-2}{2}}} f_{u_1} f_{u_2} \cdots f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}} f_k f_{k+1} \\
 & \quad f_{k+i_1} f_{k+i_2} \cdots f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}} f_{k+u_1} f_{k+u_2} \cdots f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}} f_{2k} C_1 C_2 \cdots C_r \cdots C_{l-3} C_{l-2}) \\
 &= (-1)^{\frac{l-3}{2}} (-1)^{\binom{\frac{j-2}{2}+2}{2}} (-1) \text{sgn}(f_1 f_2 f_3 f_4 \cdots f_k f_{k+1} f_{k+2} f_{k+3} \cdots f_{2k-1} f_{2k} \\
 & \quad C_1 C_2 \cdots C_r \cdots C_{l-3} C_{l-2}) \quad (\text{Observação B.9}) \\
 &= (-1)^{\frac{l-3}{2}} (-1)^{\binom{\frac{j-2}{2}+2}{2}} (-1) \text{sgn}(f_1 f_2 f_3 f_4 \cdots f_k f_{k+1} f_{k+2} f_{k+3} \cdots f_{2k-1} \\
 & \quad f_{2k} f_{2k+1} f_{2k+2} \cdots f_{2k+2l-5} f_{2k+2l-4}) \\
 &= (-1)^{\frac{l-3}{2}+2} = (-1)^{\frac{l+1}{2}} \quad (k \text{ par e } j \equiv 0 \pmod{4}).
 \end{aligned}$$

Em seguida, para computar o sinal dos caminhos eulerianos do segundo, terceiro e quarto tipo, procederemos de forma análoga ao caso anterior através das seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
 & \text{sgn}(C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)}\cdots C_{\sigma(r-1)}^{-1}f_{k+1}f_{k+i_1}f_{i_1}f_{i_2}f_{k+i_2}\cdots f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}}f_{i_{\frac{j-2}{2}}}f_1C_{\sigma(r)}\cdots C_{\sigma(s)} \\
 & \quad f_k f_{u_1} f_{k+u_1} f_{k+u_2} f_{u_2} \cdots f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}} f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}} f_{2k} C_{\sigma(s+1)}^{-1} \cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1} C_{\sigma(l-2)}) \\
 &= (-1)^{\frac{l-3}{2}} (-1)^{\binom{\frac{j-2}{2}+2}{2}} (-1) (-1)^{\binom{\frac{j-2}{2}+1}{2}} \text{sgn}(f_1 f_2 \cdots f_{2k+2l-5} f_{2k+2l-4}) \\
 &= (-1)^{\frac{l-3}{2}+2} = (-1)^{\frac{l+1}{2}} \quad (k \text{ par e } j \equiv 0 \pmod{4}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{sgn}(C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)} \cdots C_{\sigma(r-1)}^{-1}f_1f_{i_1}f_{k+i_1}f_{k+i_2}f_{i_2} \cdots f_{i_{\frac{j-2}{2}}}f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}}f_{k+1}C_{\sigma(r)} \cdots C_{\sigma(s)} \\
& \quad f_{2k}f_{k+u_1}f_{u_1}f_{u_2}f_{k+u_2} \cdots f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_kC_{\sigma(s+1)}^{-1} \cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}) \\
& = (-1)^{\frac{l-3}{2}}(-1)^{\binom{\frac{j-2}{2}+2}{2}}\binom{2k-j-2}{2}(-1)^{\frac{j-2}{2}}(-1)^{\frac{2k-j-2}{2}}\text{sgn}(f_1f_2 \cdots f_{2k+2l-5}f_{2k+2l-4}) \\
& = (-1)^{\frac{l-3}{2}+2} = (-1)^{\frac{l+1}{2}} \quad (k \text{ par e } j \equiv 0 \pmod{4}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{sgn}(C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)} \cdots C_{\sigma(r-1)}^{-1}f_{k+1}f_{k+i_1}f_{i_1}f_{i_2}f_{k+i_2} \cdots f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}}f_{i_{\frac{j-2}{2}}}f_1C_{\sigma(r)} \cdots C_{\sigma(s)} \\
& \quad f_{2k}f_{k+u_1}f_{u_1}f_{u_2}f_{k+u_2} \cdots f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_kC_{\sigma(s+1)}^{-1} \cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}) \\
& = (-1)^{\frac{l-3}{2}}(-1)^{\binom{\frac{j-2}{2}+2}{2}}\binom{2k-j-2}{2}(-1)(-1)^{\binom{2k-j-2}{2}}\text{sgn}(f_1f_2 \cdots f_{2k+2l-5}f_{2k+2l-4}) \\
& = (-1)^{\frac{l-3}{2}+2} = (-1)^{\frac{l+1}{2}} \quad (k \text{ par e } j \equiv 0 \pmod{4}).
\end{aligned}$$

Desse modo, concluímos que os sinais dos caminhos eulerianos em  $M_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$  têm o mesmo sinal e esse sinal é igual a  $(-1)^{\frac{l+1}{2}}$ . Ademais, como os cálculos acima independem de  $r$  e  $s$ , obtemos que todos os caminhos pertencentes aos conjuntos  $M_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$ , onde  $r \in \{1, 3, 5, \dots, l-2\}$ ,  $s \in \{1, 3, 5, \dots, l-2\}$  e  $j = 4t$ , com  $1 \leq t \leq \frac{k-2}{2}$ , têm o mesmo sinal e esse sinal é dado por  $(-1)^{\frac{l+1}{2}}$ . ■

Nos próximos lemas iremos omitir os cálculos dos sinais dos caminhos eulerianos considerados, pois esses cálculos podem ser realizados combinando-se as Observações B.7, B.8 e B.9 com argumentos semelhantes aos utilizados no Lema B.12. Entretanto, com a finalidade de contar futuramente os caminhos eulerianos positivos e negativos em  $H(S'_{(k,l)})$ , iremos explicitar no enunciado de cada um dos lemas os tipos de caminhos que temos em cada um dos conjuntos.

**Lema B.13.** *Os caminhos pertencentes aos conjuntos  $O_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$ , onde  $r \in \{0, 2, \dots, l-5\}$ ,  $s \in \{r+2, r+4, r+6, \dots, l-3\}$  e  $j = 2t$ , com  $1 \leq t \leq k-1$ , têm o mesmo sinal e esse sinal é dado por  $(-1)^{\frac{l-1}{2}}$ . Além disso, quando  $j \equiv 0 \pmod{4}$  cada caminho em  $O_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$  é de uma das seguintes formas*

- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)} \cdots C_{\sigma(r)}^{-1}f_1f_{i_1}f_{k+i_1}f_{k+i_2}f_{i_2} \cdots f_{i_{\frac{j-2}{2}}}f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}}f_{2k}C_{\sigma(r+1)}^{-1} \cdots C_{\sigma(s-1)}^{-1}$   
 $C_{\sigma(s)}f_kf_{u_1}f_{k+u_1}f_{k+u_2}f_{u_2} \cdots f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{k+1}C_{\sigma(s+1)} \cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}$ ,  
 onde  $i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\}$  e  $u_1, \dots, u_{\frac{2k-j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}}\}$ ;
- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)} \cdots C_{\sigma(r)}^{-1}f_{k+1}f_{k+i_1}f_{i_1}f_{i_2}f_{k+i_2} \cdots f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}}f_{i_{\frac{j-2}{2}}}f_kC_{\sigma(r+1)}^{-1} \cdots C_{\sigma(s-1)}^{-1}$   
 $C_{\sigma(s)}f_{2k}f_{k+u_1}f_{u_1}f_{u_2}f_{k+u_2} \cdots f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_1C_{\sigma(s+1)} \cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}$ ,  
 onde  $i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\}$  e  $u_1, \dots, u_{\frac{2k-j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}}\}$ .

Por outro lado, quando  $j \equiv 2 \pmod{4}$  cada caminho em  $O_{(r,s)}^{(j, 2k-j)}$  será de uma das formas

- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)} \dots C_{\sigma(r)}^{-1}f_1f_{i_1}f_{k+i_1}f_{k+i_2}f_{i_2} \dots f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}}f_{i_{\frac{j-2}{2}}}f_kC_{\sigma(r+1)}^{-1} \dots C_{\sigma(s-1)}^{-1}$   
 $C_{\sigma(s)}f_{2k}f_{k+u_1}f_{u_1}f_{u_2}f_{k+u_2} \dots f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{k+1}C_{\sigma(s+1)} \dots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}$ ,  
 onde  $i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\}$  e  $u_1, \dots, u_{\frac{2k-j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}}\}$ ;
- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)} \dots C_{\sigma(r)}^{-1}f_{k+1}f_{k+i_1}f_{i_1}f_{i_2}f_{k+i_2} \dots f_{i_{\frac{j-2}{2}}}f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}}f_{2k}C_{\sigma(r+1)}^{-1} \dots C_{\sigma(s-1)}^{-1}$   
 $C_{\sigma(s)}f_kf_{u_1}f_{k+u_1}f_{k+u_2}f_{u_2} \dots f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_1C_{\sigma(s+1)} \dots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}$ ,  
 onde  $i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\}$  e  $u_1, \dots, u_{\frac{2k-j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}}\}$ .

**Lema B.14.** Os caminhos pertencentes aos conjuntos  $P_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$ , onde  $r \in \{1, 3, \dots, l-4\}$ ,  $s \in \{r+2, r+4, r+6, \dots, l-2\}$  e  $j = 2t$ , com  $1 \leq t \leq k-1$ , têm o mesmo sinal e esse sinal é dado por  $(-1)^{\frac{t-1}{2}}$ . Além disso, quando  $j \equiv 0 \pmod{4}$ , cada caminho em  $P_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$  é de uma das formas

- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)} \dots C_{\sigma(r)}f_kf_{i_1}f_{k+i_1}f_{k+i_2}f_{i_2} \dots f_{i_{\frac{j-2}{2}}}f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}}f_{k+1}C_{\sigma(r+1)} \dots C_{\sigma(s-1)}$   
 $C_{\sigma(s)}^{-1}f_1f_{u_1}f_{k+u_1}f_{k+u_2}f_{u_2} \dots f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{2k}C_{\sigma(s+1)}^{-1} \dots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}$ ,  
 onde  $i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\}$  e  $u_1, \dots, u_{\frac{2k-j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}}\}$ ;
- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)} \dots C_{\sigma(r)}f_{2k}f_{k+i_1}f_{i_1}f_{i_2}f_{k+i_2} \dots f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}}f_{i_{\frac{j-2}{2}}}f_1C_{\sigma(r+1)} \dots C_{\sigma(s-1)}$   
 $C_{\sigma(s)}^{-1}f_{k+1}f_{k+u_1}f_{u_1}f_{u_2}f_{k+u_2} \dots f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_kC_{\sigma(s+1)}^{-1} \dots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}$ ,  
 onde  $i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\}$  e  $u_1, \dots, u_{\frac{2k-j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}}\}$ .

Por outro lado, se  $j \equiv 2 \pmod{4}$  então cada caminho em  $P_{(r,s)}^{(j, 2k-j)}$  será de uma das formas

- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)} \dots C_{\sigma(r)}f_kf_{i_1}f_{k+i_1}f_{k+i_2}f_{i_2} \dots f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}}f_{i_{\frac{j-2}{2}}}f_1C_{\sigma(r+1)} \dots C_{\sigma(s-1)}$   
 $C_{\sigma(s)}^{-1}f_{k+1}f_{k+u_1}f_{u_1}f_{u_2}f_{k+u_2} \dots f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{2k}C_{\sigma(s+1)}^{-1} \dots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}$ ,  
 onde  $i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\}$  e  $u_1, \dots, u_{\frac{2k-j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}}\}$ ;
- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)} \dots C_{\sigma(r)}f_{2k}f_{k+i_1}f_{i_1}f_{i_2}f_{k+i_2} \dots f_{i_{\frac{j-2}{2}}}f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}}f_{k+1}C_{\sigma(r+1)} \dots C_{\sigma(s-1)}$   
 $C_{\sigma(s)}^{-1}f_1f_{u_1}f_{k+u_1}f_{k+u_2}f_{u_2} \dots f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_kC_{\sigma(s+1)}^{-1} \dots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}$ ,  
 onde  $i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\}$  e  $u_1, \dots, u_{\frac{2k-j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}}\}$ .

**Lema B.15.** Os caminhos pertencentes aos conjuntos  $N_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$ , onde  $r \in \{0, 2, \dots, l-3\}$ ,  $s \in \{r+1, r+3, r+5, \dots, l-2\}$  e  $j \equiv 0 \pmod{4}$ , têm o mesmo sinal e esse sinal é dado por  $(-1)^{\frac{l+1}{2}}$ . Ademais, sob essas condições cada caminho em  $N_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$  é de uma das formas

- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)}\cdots C_{\sigma(r)}^{-1}f_1f_{i_1}f_{k+i_1}f_{k+i_2}f_{i_2}\cdots f_{i_{\frac{j-2}{2}}}f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}}f_{2k}C_{\sigma(r+1)}^{-1}\cdots C_{\sigma(s-1)}C_{\sigma(s)}^{-1}f_{k+1}f_{k+u_1}f_{u_1}f_{u_2}f_{k+u_2}\cdots f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{2k}C_{\sigma(s+1)}^{-1}\cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}$ ,  
onde  $i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\}$  e  $u_1, \dots, u_{\frac{2k-j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}}\}$ ;
- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)}\cdots C_{\sigma(r)}^{-1}f_{k+1}f_{k+i_1}f_{i_1}f_{i_2}f_{k+i_2}\cdots f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}}f_{i_{\frac{j-2}{2}}}f_{2k}C_{\sigma(r+1)}^{-1}\cdots C_{\sigma(s-1)}C_{\sigma(s)}^{-1}f_1f_{u_1}f_{k+u_1}f_{k+u_2}f_{u_2}\cdots f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{2k}C_{\sigma(s+1)}^{-1}\cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}$ ,  
onde  $i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\}$  e  $u_1, \dots, u_{\frac{2k-j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}}\}$ .

**Lema B.16.** Os caminhos pertencentes aos conjuntos  $N_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$ , onde  $r \in \{0, 2, \dots, l-3\}$ ,  $s \in \{r+1, r+3, r+5, \dots, l-2\}$  e  $j \equiv 2 \pmod{4}$ , têm o mesmo sinal e esse sinal é dado por  $(-1)^{\frac{l-1}{2}}$ . Ademais, sob essas condições cada caminho em  $N_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$  é de uma das formas:

- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)}\cdots C_{\sigma(r)}^{-1}f_1f_{i_1}f_{k+i_1}f_{k+i_2}f_{i_2}\cdots f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}}f_{i_{\frac{j-2}{2}}}f_{2k}C_{\sigma(r+1)}^{-1}\cdots C_{\sigma(s-1)}C_{\sigma(s)}^{-1}f_{k+1}f_{k+u_1}f_{u_1}f_{u_2}f_{k+u_2}\cdots f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{2k}C_{\sigma(s+1)}^{-1}\cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}$ ,  
onde  $i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\}$  e  $u_1, \dots, u_{\frac{2k-j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}}\}$ ;
- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)}\cdots C_{\sigma(r)}^{-1}f_{k+1}f_{k+i_1}f_{i_1}f_{i_2}f_{k+i_2}\cdots f_{i_{\frac{j-2}{2}}}f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}}f_{2k}C_{\sigma(r+1)}^{-1}\cdots C_{\sigma(s-1)}C_{\sigma(s)}^{-1}f_1f_{u_1}f_{k+u_1}f_{k+u_2}f_{u_2}\cdots f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{2k}C_{\sigma(s+1)}^{-1}\cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}$ ,  
onde  $i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\}$  e  $u_1, \dots, u_{\frac{2k-j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}}\}$ .

**Lema B.17.** Os caminhos pertencentes aos conjuntos  $Q_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$ , onde  $r \in \{1, 3, \dots, l-4\}$ ,  $s \in \{r+1, r+2, r+3, \dots, l-3\}$  e  $j \equiv 0 \pmod{4}$ , têm o mesmo sinal e esse sinal é dado por  $(-1)^{\frac{l-3}{2}}$ . Além disso, sob essas condições cada caminho em  $Q_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$  é de uma das seguintes formas:

- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)}\cdots C_{\sigma(r)}f_kf_{i_1}f_{k+i_1}f_{k+i_2}f_{i_2}\cdots f_{i_{\frac{j-2}{2}}}f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}}f_{k+1}C_{\sigma(r+1)}\cdots C_{\sigma(s-1)}^{-1}C_{\sigma(s)}f_{2k}f_{k+u_1}f_{u_1}f_{u_2}f_{k+u_2}\cdots f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_1C_{\sigma(s+1)}\cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}$ ,  
onde  $i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\}$  e  $u_1, \dots, u_{\frac{2k-j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}}\}$ ;
- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)}\cdots C_{\sigma(r)}f_{2k}f_{k+i_1}f_{i_1}f_{i_2}f_{k+i_2}\cdots f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}}f_{i_{\frac{j-2}{2}}}f_1C_{\sigma(r+1)}\cdots C_{\sigma(s-1)}^{-1}C_{\sigma(s)}f_kf_{u_1}f_{k+u_1}f_{k+u_2}f_{u_2}\cdots f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{k+1}C_{\sigma(s+1)}\cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}$ ,  
onde  $i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\}$  e  $u_1, \dots, u_{\frac{2k-j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}}\}$ .

**Lema B.18.** Os caminhos pertencentes aos conjuntos  $Q_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$ , onde  $r \in \{1, 3, \dots, l-4\}$ ,  $s \in \{r+1, r+3, \dots, l-3\}$  e  $j \equiv 2 \pmod{4}$ , têm o mesmo sinal e esse sinal é dado por  $(-1)^{\frac{l-5}{2}}$ . Além disso, sob essas condições cada caminho em  $Q_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$  é de uma das seguintes formas:

- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)}\cdots C_{\sigma(r)}fkf_{i_1}fk_{+i_1}fk_{+i_2}f_{i_2}\cdots f_{k+i_{\frac{j-2}{2}}}f_{i_{\frac{j-2}{2}}}f_1C_{\sigma(r+1)}\cdots C_{\sigma(s-1)}^{-1}$   
 $C_{\sigma(s)}f_2kf_{k+u_1}f_{u_1}f_{u_2}fk_{+u_2}\cdots f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}}fk_{+u_{\frac{2k-j-2}{2}}}fk_{+1}C_{\sigma(s+1)}\cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}$ ,  
 onde  $i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\}$  e  $u_1, \dots, u_{\frac{2k-j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}}\}$ ;
- $C_{\sigma(1)}C_{\sigma(2)}^{-1}C_{\sigma(3)}\cdots C_{\sigma(r)}f_2kf_{k+i_1}f_{i_1}f_{i_2}fk_{+i_2}\cdots f_{i_{\frac{j-2}{2}}}fk_{+i_{\frac{j-2}{2}}}fk_{+1}C_{\sigma(r+1)}\cdots C_{\sigma(s-1)}^{-1}$   
 $C_{\sigma(s)}fkf_{u_1}fk_{+u_1}fk_{+u_2}f_{u_2}\cdots f_{k+u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_{u_{\frac{2k-j-2}{2}}}f_1C_{\sigma(s+1)}\cdots C_{\sigma(l-3)}^{-1}C_{\sigma(l-2)}$ ,  
 onde  $i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\}$  e  $u_1, \dots, u_{\frac{2k-j-2}{2}} \in \{2, \dots, k-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{\frac{j-2}{2}}\}$ .

Com base nos lemas anteriores, podemos concluir que se  $l \equiv 1 \pmod{4}$ , então todos os caminhos eulerianos pertencentes aos conjuntos  $M_{(r)}^{(2k,0)}$ ,  $M_{(s)}^{(0,2k)}$ ,  $O_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$  e  $P_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$  são positivos para quaisquer valores de  $r, s$  e  $j$  para os quais esses conjuntos estão definidos. Além disso, os caminhos pertencentes aos conjuntos  $N_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$  e  $Q_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$ , com  $j \equiv 2 \pmod{4}$  e  $r, s$  assumindo quaisquer valores para os quais esses conjuntos estão definidos, também são positivos. Por outro lado, os caminhos eulerianos pertencentes a  $M_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$  são negativos para quaisquer valores de  $r, s$  e  $j$  para os quais esses conjuntos estão definidos, e os caminhos pertencentes a  $N_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$  e a  $Q_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$ , com  $j \equiv 0 \pmod{4}$  e  $r, s$  quaisquer valores para os quais esses conjuntos estão definidos, também são negativos. Agora, se  $l \equiv 3 \pmod{4}$ , então em cada conjunto ocorre exatamente o oposto com relação aos sinais dos caminhos eulerianos. Assim, conhecemos os sinais de todos os caminhos eulerianos de 1 a  $k$  em  $H(S'_{(k,l)})$ .

Por sua vez, denotaremos por CA a quantidade de caminhos pertencentes aos conjuntos  $M_{(r)}^{(2k,0)}$ ,  $M_{(s)}^{(0,2k)}$ ,  $O_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$ ,  $P_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$  para quaisquer valores de  $r, s$  e  $j$  para os quais esses conjuntos estão definidos, e aos conjuntos  $N_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$  e  $Q_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$ , com  $j \equiv 2 \pmod{4}$  e  $r, s$  assumindo valores para os quais esses conjuntos estão definidos. Isto é,

$$\begin{aligned} \text{CA} &= \sum_{\beta=0}^{\frac{l-3}{2}} \# M_{(2\beta+1)}^{(2k,0)} + \sum_{\alpha=0}^{\frac{l-3}{2}} \# M_{(2\alpha+1)}^{(0,2k)} + \sum_{t=1}^{k-1} \sum_{\beta=0}^{\frac{l-5}{2}} \left( \sum_{\alpha=1}^{\frac{l-3-2\beta}{2}} \# O_{(2\beta, 2\beta+2\alpha)}^{(2t, 2k-2t)} \right) \\ &+ \sum_{t=1}^{k-1} \sum_{\beta=0}^{\frac{l-5}{2}} \left( \sum_{\alpha=1}^{\frac{l-3-2\beta}{2}} \# P_{(2\beta+1, 2\beta+1+2\alpha)}^{(2t, 2k-2t)} \right) + \sum_{t=0}^{k-2} \sum_{\beta=0}^{\frac{l-3}{2}} \left( \sum_{\alpha=0}^{\frac{l-3-2\beta}{2}} \# N_{(2\beta, 2\beta+2\alpha+1)}^{(4t+2, 2k-4t-2)} \right) \\ &+ \sum_{t=0}^{k-2} \sum_{\beta=0}^{\frac{l-5}{2}} \left( \sum_{\alpha=0}^{\frac{l-5-2\beta}{2}} \# Q_{(2\beta+1, 2\beta+1+2\alpha+1)}^{(4t+2, 2k-4t-2)} \right). \end{aligned}$$

Além disso, denotaremos por CB a quantidade de caminhos pertencentes aos conjuntos  $M_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$ , onde  $r, s$  e  $j$  assumem quaisquer valores para os quais esses conjuntos estão definidos, e aos conjuntos  $N_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$  e  $Q_{(r,s)}^{(j,2k-j)}$ , com  $j \equiv 0 \pmod{4}$  e  $r, s$  assumindo quaisquer

valores para os quais esses conjuntos estão definidos. Ou seja,

$$\begin{aligned} \text{CB} = & \sum_{t=1}^{\frac{k-2}{2}} \sum_{\beta=0}^{\frac{l-3}{2}} \left( \sum_{\alpha=0}^{\frac{l-3}{2}} \# M_{(2\beta+1, 2\alpha+1)}^{(4t, 2k-4t)} \right) + \sum_{t=1}^{\frac{k-2}{2}} \sum_{\beta=0}^{\frac{l-3}{2}} \left( \sum_{\alpha=0}^{\frac{l-3-2\beta}{2}} \# N_{(2\beta, 2\beta+2\alpha+1)}^{(4t, 2k-4t)} \right) \\ & + \sum_{t=1}^{\frac{k-2}{2}} \sum_{\beta=0}^{\frac{l-5}{2}} \left( \sum_{\alpha=0}^{\frac{l-5-2\beta}{2}} \# Q_{(2\beta+1, 2\beta+1+2\alpha+1)}^{(4t, 2k-4t)} \right). \end{aligned}$$

Em seguida, observando a descrição dos caminhos existentes em cada um dos conjuntos apresentados nos lemas anteriores, obtemos a seguir as cardinalidades desses conjuntos.

Isso nos permitirá calcular os valores CA e CB que serão apresentados nos próximos lemas.

- $\# M_{(r)}^{(2k,0)} = \binom{2}{1} (k-1)! (l-2)!$ ,  
para todo  $r \in \{1, 3, 5, \dots, l-2\}$ ;
- $\# M_{(s)}^{(0,2k)} = \binom{2}{1} (k-1)! (l-2)!$ ,  
para todo  $s \in \{1, 3, 5, \dots, l-2\}$ ;
- $\# M_{(r,s)}^{(j,2k-j)} = \binom{2}{1} \binom{k-2}{\frac{j-2}{2}} \left(\frac{j-2}{2}\right)! \binom{2}{1} \left(k-2 - \left(\frac{j-2}{2}\right)\right)! (l-2)!$ ,  
onde  $r \in \{1, 3, 5, \dots, l-2\}$ ,  $s \in \{1, 3, 5, \dots, l-2\}$  e  $j = 4t$ , com  $1 \leq t \leq \frac{k-2}{2}$ ;
- $\# N_{(r,s)}^{(j,2k-j)} = \binom{2}{1} \binom{k-2}{\frac{j-2}{2}} \left(\frac{j-2}{2}\right)! \left(k-2 - \left(\frac{j-2}{2}\right)\right)! (l-2)!$ ,  
onde  $r \in \{0, 2, 4, \dots, l-3\}$ ,  $s \in \{r+1, r+3, r+5, \dots, l-2\}$  e  $j = 2t$ , com  $1 \leq t \leq k-1$ ;
- $\# O_{(r,s)}^{(j,2k-j)} = \binom{2}{1} \binom{k-2}{\frac{j-2}{2}} \left(\frac{j-2}{2}\right)! \left(k-2 - \left(\frac{j-2}{2}\right)\right)! (l-2)!$ ,  
onde  $r \in \{0, 2, 4, \dots, l-5\}$ ,  $s \in \{r+2, r+4, r+6, \dots, l-3\}$  e  $j = 2t$ , com  $1 \leq t \leq k-1$ ;
- $\# P_{(r,s)}^{(j,2k-j)} = \binom{2}{1} \binom{k-2}{\frac{j-2}{2}} \left(\frac{j-2}{2}\right)! \left(k-2 - \left(\frac{j-2}{2}\right)\right)! (l-2)!$ ,  
onde  $r \in \{1, 3, 5, \dots, l-4\}$ ,  $s \in \{r+2, r+4, r+6, \dots, l-2\}$  e  $j = 2t$ , com  $1 \leq t \leq k-1$ ;
- $\# Q_{(r,s)}^{(j,2k-j)} = \binom{2}{1} \binom{k-2}{\frac{j-2}{2}} \left(\frac{j-2}{2}\right)! \left(k-2 - \left(\frac{j-2}{2}\right)\right)! (l-2)!$ ,  
onde  $r \in \{1, 3, 5, \dots, l-4\}$ ,  $s \in \{r+1, r+3, \dots, l-3\}$  e  $j = 2t$ , com  $1 \leq t \leq k-1$ .

**Lema B.19.** *A quantidade de caminhos eulerianos CA é dada pela seguinte expressão.*

$$\begin{aligned} \text{CA} = & \left[ \binom{l-1}{2} \left[ \binom{l-1}{2} \frac{k}{2} + (2k-2) \right] + \binom{l-3}{2} \binom{l-3}{2} \binom{5k-4}{2} \right. \\ & \left. - \binom{l-3}{2} \binom{l-1}{4} \frac{k}{2} + \binom{4-5k}{2} \binom{l-5}{2} \binom{l-3}{4} \right] 2(k-2)! (l-2)!. \end{aligned}$$

**Demonstração.** De fato, substituindo em CA as cardinalidades obtidas acima e realizando as operações necessárias, obtemos

$$\begin{aligned}
 \text{CA} &= \sum_{\beta=0}^{\frac{l-3}{2}} \binom{2}{1} (k-1)!(l-2)! + \sum_{\alpha=0}^{\frac{l-3}{2}} \binom{2}{1} (k-1)!(l-2)! \\
 &+ \sum_{t=1}^{k-1} \sum_{\beta=0}^{\frac{l-5}{2}} \left( \sum_{\alpha=1}^{\frac{l-3-2\beta}{2}} \binom{2}{1} \binom{k-2}{\frac{2t-2}{2}} \left( \frac{2t-2}{2} \right)! \left( k-2 - \left( \frac{2t-2}{2} \right) \right)! (l-2)! \right) \\
 &+ \sum_{t=1}^{k-1} \sum_{\beta=0}^{\frac{l-5}{2}} \left( \sum_{\alpha=1}^{\frac{l-3-2\beta}{2}} \binom{2}{1} \binom{k-2}{\frac{2t-2}{2}} \left( \frac{2t-2}{2} \right)! \left( k-2 - \left( \frac{2t-2}{2} \right) \right)! (l-2)! \right) \\
 &+ \sum_{t=0}^{\frac{k-2}{2}} \sum_{\beta=0}^{\frac{l-3}{2}} \left( \sum_{\alpha=0}^{\frac{l-3-2\beta}{2}} \binom{2}{1} \binom{k-2}{\frac{4t+2-2}{2}} \left( \frac{4t+2-2}{2} \right)! \left( k-2 - \left( \frac{4t+2-2}{2} \right) \right)! (l-2)! \right) \\
 &+ \sum_{t=0}^{\frac{k-2}{2}} \sum_{\beta=0}^{\frac{l-5}{2}} \left( \sum_{\alpha=0}^{\frac{l-3-2\beta}{2}} \binom{2}{1} \binom{k-2}{\frac{4t+2-2}{2}} \left( \frac{4t+2-2}{2} \right)! \left( k-2 - \left( \frac{4t+2-2}{2} \right) \right)! (l-2)! \right) \\
 &= 2 \binom{l-1}{2} 2(k-1)!(l-2)! + 2(k-1) \sum_{\beta=0}^{\frac{l-5}{2}} \left( \binom{l-3-2\beta}{2} 2(k-2)!(l-2)! \right) \\
 &+ \frac{k}{2} \sum_{\beta=0}^{\frac{l-3}{2}} \left( \binom{l-1-2\beta}{2} 2(k-2)!(l-2)! \right) \\
 &+ \frac{k}{2} \sum_{\beta=0}^{\frac{l-5}{2}} \left( \binom{l-3-2\beta}{2} 2(k-2)!(l-2)! \right) \\
 &= 2(k-1) \binom{l-1}{2} 2(k-2)!(l-2)! + 2(k-1) \binom{l-3}{2} \left( \binom{l-3}{2} 2(k-2)!(l-2)! \right) \\
 &- 2(k-1) \binom{l-5}{2} \binom{l-3}{4} 2(k-2)!(l-2)! + \frac{k}{2} \binom{l-1}{2} \left( \binom{l-1}{2} 2(k-2)!(l-2)! \right) \\
 &- \frac{k}{2} \binom{l-3}{2} \binom{l-1}{4} 2(k-2)!(l-2)! + \frac{k}{2} \binom{l-3}{2} \left( \binom{l-3}{2} 2(k-2)!(l-2)! \right) \\
 &- \frac{k}{2} \binom{l-5}{2} \binom{l-3}{4} 2(k-2)!(l-2)! \\
 &= \left[ \binom{l-1}{2} \left[ \binom{l-1}{2} \frac{k}{2} + (2k-2) \right] + \binom{l-3}{2} \binom{l-3}{2} \binom{5k-4}{2} \right. \\
 &\left. - \binom{l-3}{2} \binom{l-1}{4} \frac{k}{2} + \binom{4-5k}{2} \binom{l-5}{2} \binom{l-3}{4} \right] 2(k-2)!(l-2)!.
 \end{aligned}$$

■

Agora, substituindo em CB as cardinalidades de cada um dos conjuntos e realizando as operações necessárias, obtemos o seguinte.

**Lema B.20.** *A quantidade de caminhos eulerianos CB é dada pela seguinte expressão.*

$$\begin{aligned} \text{CB} = & \left[ \binom{l-1}{2} \left[ \binom{l-1}{2}^2 + \binom{l-1}{2} \right] + \binom{l-3}{2} \binom{l-3}{2} \right. \\ & \left. - \binom{l-3}{2} \binom{l-1}{4} - \binom{l-5}{2} \binom{l-3}{4} \right] 2 \binom{k-2}{2} (k-2)!(l-2)!. \end{aligned}$$

Desse modo, o teorema abaixo estabelece que, no caso em que  $k$  é par e  $l \geq 3$  é ímpar, o grafo  $H(S'_{(k,l)})$  é não cancelador.

**Teorema B.21.** *O grafo  $H(S'_{(k,l)})$  é não cancelador, para todo  $k$  par e  $l \geq 3$  ímpar.*

**Demonstração.** Para demonstrar que  $H(S'_{(k,l)})$  é não cancelador, basta demonstrarmos que o vértice 1 em  $H(S'_{(k,l)})$  é não cancelador, isto é, que o número caminhos eulerianos de 1 a  $k$  positivos em  $H(S'_{(k,l)})$  é diferente do número caminhos eulerianos de 1 a  $k$  negativos em  $H(S'_{(k,l)})$ . Para tanto, usaremos os Lemas B.19 e B.20, para obtermos que  $CA \neq CB$ .

De fato, usando os Lemas B.19 e B.20, temos que

$$CA - CB = \frac{1}{8}(k-2)!(l-2)! [8k(l-1) + 8l(l-3) + 16].$$

Assim, como  $l \geq 3$  e  $k > 0$ , obtemos que  $CA - CB > 0$ , ou seja,  $CA \neq CB$ .

■

O teorema a seguir estabelece que o grafo  $H(S'_{(k,l)})$  é não cancelador, para todo  $k$  par e  $l \geq 3$  par.

**Teorema B.22.** *O grafo  $H(S'_{(k,l)})$  é não cancelador, para todo  $k$  par e  $l \geq 3$  par.*

**Demonstração.** Note que em  $H(S'_{(k,l)})$ , temos que  $\partial(k+1) = \partial(k+2) = k$  é par,  $\partial(1) = \partial(k) = l$  é par e que todos os outros vértices em  $H(S'_{(k,l)})$  têm grau 2. Assim, pelo Teorema A.9, o grafo  $H(S'_{(k,l)})$  tem caminho eulerianos que ligam o vértice  $k+l$  a si mesmo. Além do mais, podemos notar que esses caminhos são de uma das seguintes formas:

$$f_{2k+2l-5} C f_{2k+2l-4} \quad \text{ou} \quad f_{2k+2l-4} C^{-1} f_{2k+2l-5},$$

onde  $C$  percorre todos os caminhos eulerianos que ligam o vértice 1 ao vértice  $k$  no grafo  $H(S'_{(k,l-1)})$  e  $C^{-1}$  percorre os inversos desses caminhos.

Desse modo, temos que

$$\operatorname{sgn}(f_{2k+2l-4}C^{-1}f_{2k+2l-5}) = (-1)^{\binom{(2k+2l-4)(2k+2l-5)}{2}} \operatorname{sgn}(f_{2k+2l-5}Cf_{2k+2l-4}).$$

Como  $k$  e  $l$  são números pares, segue que

$$\operatorname{sgn}(f_{2k+2l-4}C^{-1}f_{2k+2l-5}) = \operatorname{sgn}(f_{2k+2l-5}Cf_{2k+2l-4}).$$

Por outro lado,  $\operatorname{sgn}(f_{2k+2l-5}Cf_{2k+2l-4}) = (-1)^{2k+2l-6} \operatorname{sgn}(Cf_{2k+2l-5}f_{2k+2l-4}) = \operatorname{sgn}(C)$ . Assim, concluímos que o número de caminhos eulerianos positivos que ligam  $k+l$  a si mesmo em  $H(S'_{(k,l)})$  é igual a duas vezes o número de caminhos eulerianos positivos que ligam 1 a  $k$  em  $H(S'_{(k,l-1)})$ . Do mesmo modo, concluímos que o número de caminhos eulerianos negativos que ligam  $k+l$  a si mesmo em  $H(S'_{(k,l)})$  é igual a duas vezes o número de caminhos eulerianos negativos que ligam 1 a  $k$  em  $H(S'_{(k,l-1)})$ . Portanto,  $H(S'_{(k,l)})$  é não cancelador, se e somente se,  $H(S'_{(k,l-1)})$  é não cancelador. Como  $l-1$  é ímpar, pelo Teorema B.21, o grafo  $H(S'_{(k,l-1)})$  é não cancelador, donde segue que  $H(S'_{(k,l)})$  é não cancelador, para todo  $k$  par e  $l \geq 3$  par. ■

Finalmente, combinando os Teoremas B.21 e B.22, obtemos a demonstração do Teorema 2.15, como queríamos.