Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

Alan de Araujo Guimarães

Graduações e identidades polinomiais graduadas da álgebra de Grassmann

CAMPINAS

2019

Alan de Araujo Guimarães

Graduações e identidades polinomiais graduadas da álgebra de Grassmann

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Plamen Emilov Kochloukov

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Alan de Araujo Guimarães e orientada pelo Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov.

Campinas

2019

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 140662/2017-0

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

G947g	Guimarães, Alan de Araujo, 1989- Graduações e identidades polinomiais graduadas da álgebra de Grassmann / Alan de Araujo Guimarães. – Campinas, SP : [s.n.], 2019. Orientador: Plamen Emilov Kochloukov. Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. 1. Grassmann, Álgebra de. 2. Automorfismos. 3. Identidades polinomiais graduadas. I. Kochloukov, Plamen Emilov, 1958-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Gradings and graded polynomial identities of the Grassmann algebra
Palavras-chave em inglês:
Grassmann algebra
Automorphism
Graded polynomial identities
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Plamen Emilov Kochloukov [Orientador]
Viviane Ribeiro Tomaz da Silva
Rafael Bezerra dos Santos
Dimas José Gonçalves
Thiago Castilho de Mello
Data de defesa: 25-01-2019
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 25 de janeiro de 2019 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV

Prof(a). Dr(a). VIVIANE RIBEIRO TOMAZ DA SILVA

Prof(a). Dr(a). RAFAEL BEZERRA DOS SANTOS

Prof(a). Dr(a). DIMAS JOSÉ GONÇALVES

Prof(a). Dr(a). THIAGO CASTILHO DE MELLO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pelo dom da vida e por tudo que tem me concedido ao longo de minha existência.

Ao meus pais, Valmor Guimarães e Maria Araújo, pela minha criação e por todos os bons exemplos que tive desde criança. A todos os meus irmãos, pela amizade e por sempre estarem ao meu lado.

Ao meu orientador, professor Plamen, pela ótima orientação e por sempre ter colaborado com minha evolução no doutorado. Sou grato pela paciência ao longo da orientação e por ter contribuído sobremaneira com a elaboração da presente tese de doutorado.

A todos os professores do IMECC, pelos cursos de doutorado ministrados. Em particular, agradeço ao professor Lucio Centrone, pelo ótimo curso de PI-Teoria ministrado e por sempre se manter à disposição para conversar sobre PI-álgebras.

A todos os professores da UAM da UFCG que contribuíram fortemente com minha formação matemática. Em especial, agradeço ao meu ex-orientador do PET, professor Daniel Cordeiro, e ao meu ex-orientador de mestrado, professor Diogo Diniz, por todo incentivo. Ao excelente professor Brandão, pelos memoráveis cursos de Álgebra ministrados na época da minha graduação, os quais me fizeram ter maior interesse pela área. Ao professor e amigo Claudemir Fidelis, pela leitura do texto e sugestões.

Agradeço aos professores Dimas Gonçalves, Rafael Bezerra, Thiago Castilho e Viviane Ribeiro, pela composição da banca examinadora, pelas sugestões e correções da tese, as quais, sem dúvida, aperfeiçoaram o nosso trabalho.

Aos amigos Levi, Francisco, Bruno Letras e Leomaques.

A CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro. O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil (CAPES)-Código de Financiamento 001.

Resumo

Nesta tese apresentamos um estudo sobre graduações e identidades polinomiais graduadas da álgebra de Grassmann E de dimensão infinita e com unidade. Primeiramente, estudamos $\mathbb{Z}_2$-graduações em E sem supor homogeneidade nos geradores. Aqui consideramos E sobre um corpo de característica zero. Provamos que, para uma classe ampla de $\mathbb{Z}_2$-graduações não-homogêneas de E, as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas coincidem com as identidades das superálgebras homogêneas E_{k^*}, E_∞ ou E_k. Mais ainda, construímos uma infinidade de $\mathbb{Z}_2$-graduações não-homogêneas de E que são $\mathbb{Z}_2$-isomorfas a uma das estruturas E_{k^*}, E_∞ ou E_k. Em um segundo momento da tese, estudamos a estrutura de E como álgebra $\mathbb{Z}$-graduada, exibindo um método geral que permite $\mathbb{Z}$-graduar E. Descrevemos o $T_{\mathbb{Z}}$-ideal de identidades polinomiais para algumas dessas $\mathbb{Z}$-graduações. Em particular, descrevemos o ideal de identidades graduadas para E munida de sua $\mathbb{Z}$-graduação natural. Fizemos isso considerando E sobre corpos de característica zero e, depois, sobre corpos infinitos de característica $p > 2$.

Palavras-chave: Álgebra de Grassmann, identidades polinomiais graduadas, automorfismos.

Abstract

In this thesis we study gradings and graded polynomial identities for the infinite dimensional Grassmann algebra. First we study $\mathbb{Z}_2$-gradings on E without supposing that the generators of E are homogeneous. Here E denotes the infinite dimensional Grassmann algebra with 1 over a field of characteristic zero. We prove that, for an ample class of non homogeneous $\mathbb{Z}_2$-gradings of E, the $\mathbb{Z}_2$-graded polynomial identities coincide with the identities of the homogeneous superalgebras E_{k^*}, E_∞ or E_k. Furthermore we construct infinitely many non homogeneous $\mathbb{Z}_2$-gradings of E that are $\mathbb{Z}_2$-isomorphic to the structures E_{k^*}, E_∞ or E_k. Second we study the structure of E as $\mathbb{Z}$-graded algebra, exhibiting a general method to construct $\mathbb{Z}$-gradings on E. We describe the $T_{\mathbb{Z}}$-ideal of the polynomial identities for some $\mathbb{Z}$-gradings on E. In particular we describe the ideal of the graded identities for E endowed with its natural $\mathbb{Z}$-grading. We did it considering E over a field of characteristic zero and afterwards over an infinite field of characteristic $p > 2$.

Key words: Grassmann algebra, graded polynomial identities, automorphism.

Conteúdo

Introdução

As álgebras com identidades polinomiais são objetos de grande relevância na teoria de anéis. Uma identidade polinomial de uma álgebra $\mathcal{A}$ é um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ em variáveis não comutativas que se anula em qualquer avaliação feita por elementos de $\mathcal{A}$. Uma álgebra $\mathcal{A}$ diz-se uma PI-álgebra se admite uma identidade polinomial não nula. Exemplos clássicos de PI-álgebras são as álgebras comutativas, as álgebras de dimensão finita, as álgebras nilpotentes e seu estudo se tornou um campo fértil dentro da matemática.

A teoria das álgebras com identidades polinomiais (ou PI-teoria) tem sua gênese creditada aos matemáticos Jacobson, Kaplansky, Levitzki, Dubnov e Ivanov (ver [26, 27, 34, 17]), que estudaram a estrutura de anéis que satisfazem identidades polinomiais. Não obstante foi a partir de 1950, com o Teorema de Amitsur-Levitzki, que a PI-teoria se tornou alvo de estudos mais intensos. Tal teorema afirma que a álgebra $M_n(F)$ das matrizes $n \times n$ sobre um corpo F satisfaz a identidade standard de grau $2n$. Em outras palavras, dadas quaisquer $2n$ matrizes $n \times n$, a soma alternada de todos os possíveis produtos destas matrizes é a matriz nula. A partir daí, a descrição de todas as identidades satisfeitas por uma dada álgebra se tornou, por si só, objeto de estudos.

Denotando por $T(\mathcal{A})$ o conjunto de todas as identidades satisfeitas por uma PI-álgebra $\mathcal{A}$, observa-se que $T(\mathcal{A})$ é um ideal invariante por todos os endomorfismos de $F\langle X\rangle$, sendo, portanto, um T-ideal de $F\langle X\rangle$. Devido a isso, descrever as identidades de $\mathcal{A}$ consiste em encontrar um conjunto gerador para o T-ideal $T(\mathcal{A})$. Em 1950 Specht conjecturou que, sobre um corpo de característica zero, todo T-ideal de $F\langle X\rangle$ é finitamente gerado como T-ideal. Esta conjectura ficou conhecida como "Problema de Specht" e foi resolvida, de maneira afirmativa, por Kemer em [29, 28].

A fim de resolver o problema de Specht, Kemer fez uso da $\mathbb{Z}_2$-graduação natural da álgebra de Grassmann. Uma $\mathbb{Z}_2$-graduação numa álgebra $\mathcal{A}$ é uma decomposição $\mathcal{A} = A_0 \oplus A_1$, onde cada parcela (componente) é subespaço de $\mathcal{A}$ e $A_iA_j \subset A_{i+j}$, para i, $j \in \mathbb{Z}_2$. Neste caso, diz-se que $\mathcal{A}$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada (ou superálgebra). Seja E a álgebra de Grassmann unitária de dimensão infinita do espaço vetorial L com base enumerável $\beta = \{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$. O exemplo mais importante de superálgebra é a álgebra de Grassmann E com sua $\mathbb{Z}_2$-graduação natural $E_{can} = E_{(0)} \oplus E_{(1)}$, onde $E_{(0)}$ é gerado pela unidade e pelos monômios de tamanho par e $E_{(1)}$ é gerado pelos monômios de tamanho ímpar.

Em sua teoria, Kemer mostrou que toda PI-álgebra associativa sobre um corpo de característica zero é PI-equivalente à envolvente de Grassmann de alguma superálgebra associativa finitamente gerada. Mais tarde, foi mostrado um resultado ainda mais forte: toda PI-álgebra associativa sobre um corpo de característica zero é PI-equivalente à envolvente de Grassmann de alguma superálgebra associativa de dimensão finita. A partir daí, o estudo das estruturas de superálgebra de uma dada álgebra e das respectivas identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas ganhou relevância.

Uma graduação da álgebra de Grassmann E é chamada de *graduação homogênea* quando cada gerador e_n de E é homogêneo na graduação. Somente nos últimos quinze anos as graduações da álgebra de Grassmann têm sido investigadas mais de perto e vários artigos vêm abordando a questão. Em 2001 Anisimov [2] investigou a estrutura da álgebra E munida pela ação de automorfismos ou involuções, mas não descreveu explicitamente graduações em E. Na verdade, a completa classificação das superálgebras de Grassmann (homogêneas) em característica zero se deu em 2009 por Di Vincenzo e da Silva [12], onde os autores exibiram três classes delas, a saber: E_{k^*}, E_∞ e E_k. O mesmo problema foi resolvido em [10], sobre corpos infinitos de característica $p > 2$ e em [22], quando o corpo base é finito. Nos anos seguintes, os trabalhos [13, 11] trouxeram novos resultados a respeito de graduações e identidades polinomiais graduadas da álgebra de Grassmann. Contudo, duas hipóteses muito fortes continuaram sendo feitas, precisamente:

- Homogeneidade dos geradores $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ de E;
- Finitude do grupo que gradua E.

Na literatura, nada há a respeito das graduações em E onde uma dessas condições não é satisfeita. Neste ponto, duas perguntas surgem naturalmente:

1. A lista $\{E_{k^*}, E_\infty, E_k\}$ de $\mathbb{Z}_2$-graduações de E está completa?

2. Quais $\mathbb{Z}$-graduações a álgebra E admite?

Sabe-se que a cada $\mathbb{Z}_2$-graduação em E corresponde um automorfismo de ordem menor ou igual a 2 (e vice-versa) e esta dualidade põe em evidência a necessidade de se conhecer melhor o grupo $Aut(E)$. Nos trabalhos [35] de Makar-Limanov e [8] de Berezin, a estrutura do grupo $Aut(\Lambda_n)$ foi descrita, em que Λ_n denota a álgebra de Grassmann de dimensão finita em n geradores. No caso da álgebra de Grassmann de dimensão infinita, não temos uma boa descrição do grupo $Aut(E)$, sendo conhecidos apenas os automorfismos que são obtidos a partir de operadores lineares de ordem prima do espaço vetorial L.

Nesta tese, iremos exibir $\mathbb{Z}_2$-graduações da álgebra de Grassmann sem a hipótese de homogeneidade nos geradores e iremos classificar as $\mathbb{Z}_2$-graduações construídas. Também iremos construir $\mathbb{Z}$-graduações em E, descrevendo suas identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas. Aqui, cabe ressaltar que a única $\mathbb{Z}$-graduação em E trazida na literatura é dada por $E^{can} = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} E^{(n)}$, onde

$$E^{(n)} = \begin{cases} 0, \text{ se } n < 0 \\ F, \text{ se } n = 0 \\ span_F\{w \in \beta_E \mid |supp(w)| = n\}, \text{ se } n \geq 1 \end{cases},$$

em que β_E denota a base usual de monômios de E e $|supp(w)|$ é a cardinalidade do suporte do monômio w (tamanho de w). Tal estrutura é chamada de $\mathbb{Z}$-graduação natural de E e, ao longo de todo este trabalho, será denotada por E^{can}.

Voltando à dualidade entre automorfismos e graduações, dado um automorfismo $\varphi \in Aut(E)$ de ordem no máximo 2, podemos construir uma $\mathbb{Z}_2$-graduação $E_\varphi = E_{0,\varphi} \oplus E_{1,\varphi}$, onde $E_{0,\varphi}$ é o autoespaço associado ao autovalor 1 e $E_{1,\varphi}$ é o autoespaço associado ao autovalor -1. Reciprocamente, a partir de uma $\mathbb{Z}_2$-graduação, podemos construir um automorfismo de ordem no máximo 2, de modo que estes objetos são duais. Na verdade, existe uma dualidade ainda mais forte entre ações e graduações sobre uma dada álgebra e recomendamos [20, 21] para um maior aprofundamento no tema. As $\mathbb{Z}_2$-graduações homogêneas de E estudadas em [12] correspondem a automorfismos que agem de forma linear no espaço vetorial L. Portanto, objetivando construir novas $\mathbb{Z}_2$-graduações em E, precisamos exibir automorfismos de ordem 2 em E que não preservem o espaço base L.

Especificamente, fixada $\beta = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ base do espaço vetorial L e sendo

$\varphi \in Aut(E)$, com $\varphi^2 = 1$, definimos o conjunto $I_\beta = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(e_n) = \pm e_n\}$. Conforme a cardinalidade do conjunto I_β, há os seguintes tipos de automorfismos:

1. $I_\beta = \mathbb{N}$ (este foi o caso estudado em [12]);

2. $I_\beta \neq \mathbb{N}$ é infinito;

3. I_β é finito;

Pode ocorrer de $I_\beta = \emptyset$ e, em outra base β' de L, termos $I_{\beta'} \neq \emptyset$ (vide Exemplo 3.4.6). Em razão disso, a quarta possibilidade a ser considerada e que exclui as anteriores é:

4. $I_\gamma = \emptyset$, para toda base γ de L.

De certa forma, o conjunto I_β mede a "dispersão" dos geradores na respectiva $\mathbb{Z}_2$-graduação. Quanto menor for $|I_\beta|$, maior será a quantidade de geradores não homogêneos. Iremos distinguir os automorfismos pelo conjunto I_β e os chamaremos de automorfismos do tipo 1, 2, 3 ou 4, de acordo com os casos anteriores.

Cada $\varphi \in Aut(E)$ de ordem no máximo 2 pode ser representado na forma

$$\varphi(e_i) = \sum_j \alpha_{ji} e_j + \sum_{|a_m| \geq 2} \beta_{mi} a_m,$$

onde cada a_m é um monômio de E e $|a_m|$ denota seu tamanho. Consideremos a transformação linear φ_l definida no espaço gerado pelos e_i por

$$\varphi_l(e_i) = \sum_j \alpha_{ji} e_j.$$

Em [2] foi mostrado que φ_l pode ser estendido de forma natural a um automorfismo de ordem no máximo 2 de E, o qual é chamado de *linearização* de φ. A menos de mudança de base, desde que a característica do corpo seja diferente de 2, podemos supor que $\varphi_l(e_i) = \pm e_i$ e, assim, obtemos uma decomposição $L = L_{-1} \oplus L_1$, onde os somandos são os autoespaços de φ_l. Impondo certas condições sob φ, é possível relacionar as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas das superálgebras induzidas por φ e φ_l. Antes de enunciar um resultado de Anisimov a esse respeito, convencionaremos a seguinte nomenclatura. Diremos que um automorfismo $\varphi \in Aut(E)$ é do *tipo canônico* se preserva as componentes homogêneas da superálgebra E_{can}. O seguinte resultado estabelece um vínculo entre $\mathbb{Z}_2$-graduações homogêneas e não homogêneas em E.

Teorema:(Anisimov) Seja φ um automorfismo de ordem 2 de E do tipo canônico e suponha que uma das seguintes condições seja satisfeita:

1. $\dim L_{-1} = l < \infty$ e $\prod_{j=1}^{l+1}(\varphi(e_{i_j}) - e_{i_j}) = 0$, para quaisquer $l+1$ geradores $e_{i_1}, \ldots, e_{i_{l+1}}$.

2. $\dim L_1 = l < \infty$ e $\prod_{j=1}^{l+1}(\varphi(e_{i_j}) + e_{i_j}) = 0$, para quaisquer $l+1$ geradores $e_{i_1}, \ldots, e_{i_{l+1}}$.

Então, em qualquer dos casos, tem-se $T_2(E_\varphi) = T_2(E_{\varphi_l})$.

Provaremos que todo automorfismo φ de ordem 2 tal que I_β é infinito, necessariamente, é do tipo canônico e, com uma condição adicional, que será vista no Capítulo 3, mostraremos que $T_2(E_\varphi) = T_2(E_{\varphi_l})$.

Por outro lado, veremos que um automorfismo do tipo 3 não precisa ser do tipo canônico. Por isso, nossa intuição poderia dizer que uma superálgebra do tipo 3 deveria ter uma estrutura bem distinta de uma superálgebra homogênea. Veremos que isso não ocorre para uma classe específica de situações. Particularmente, no Capítulo 3, exibiremos uma $\mathbb{Z}_2$-graduação em E que possui apenas um gerador homogêneo, que é induzida por um automorfismo que não é do tipo canônico e, contudo, admite uma estrutura bastante familiar, sendo $\mathbb{Z}_2$-isomorfa a E_{can}.

À luz dos objetivos da tese, decidimos dividi-la em quatro capítulos. O primeiro deles é dedicado à apresentação de conceitos e fatos clássicos da PI-Teoria que são úteis aos demais capítulos. Procuramos ser concisos nessa parte da tese, enunciando diversos resultados, mas sem trazer as demonstrações, remetendo o leitor à bibliografia indicada no capítulo. O Capítulo 2 foi escrito com a finalidade de compilar os principais fatos conhecidos sobre graduações e identidades graduadas da álgebra de Grassmann. Alguns dos fatos lá expostos foram utilizados em resultados obtidos no Capítulo 3, daí a importância de apresentá-los. Ressaltamos que a concisão também foi marca proposital deste capítulo.

No Capítulo 3 da tese, trazemos um estudo sobre as superálgebras de Grassmann não-homogêneas. Para tal fim, a dualidade entre $\mathbb{Z}_2$-graduações em E e automorfismos de ordem 2 agindo sobre E foi exaustivamente explorada. Mostramos que, em várias situações, as identidades de uma superálgebra de Grassmann (não necessariamente homogênea) coincidem com as identidades das superálgebras homogêneas. Mais ainda, construímos uma classe ampla de $\mathbb{Z}_2$-graduações não-homogêneas em E que são $\mathbb{Z}_2$-isomorfas a uma das estruturas E_{k^*}, E_∞ ou E_k. Como mencionado anteriormente, exibimos uma superálgebra de Grassmann que possui apenas um gerador homogêneo e, contudo, é $\mathbb{Z}_2$-isomorfa à superálgebra E_{can}. Já para automorfismos do tipo 4, mostramos a sua inexistência em várias situações e formulamos a seguinte conjectura:

Conjectura: Seja $E = \varepsilon_0 \oplus \varepsilon_1$ uma $\mathbb{Z}_2$-graduação arbitrária na álgebra de Grassmann E. Então existe alguma base linear de L que contém, no mínimo, um gerador homogêneo na $\mathbb{Z}_2$-graduação.

O quarto e último capítulo do trabalho foi reservado ao estudo das $\mathbb{Z}$-graduações e identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas de E. Descrevemos um método geral que permite munir E com uma estrutura de $\mathbb{Z}$-graduação e descrevemos as identidades polinomiais para algumas dessas estruturas. Em particular, exibimos três $\mathbb{Z}$-graduações da álgebra de Grassmann, que denotamos por E^{k^*}, E^{∞} e E^{k}, que induzem as superálgebras E_{k^*}, E_{∞} e E_k via a graduação quociente módulo $2\mathbb{Z}$. Descrevemos explicitamente as identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas para E^{k^*} e E^{∞}. Primeiramente, fizemos tal estudo sobre corpos de característica zero e, depois, sobre corpos infinitos de característica $p > 2$. Ressaltamos que E^{k^*} tem suporte finito $Sup(E^{k^*}) = \{0, 1, \ldots, k\}$ enquanto $Sup(E^{\infty}) = \{0, 1, 2, \ldots\}$ é infinito. Também descrevemos uma graduação em E cujo suporte é todo o grupo $\mathbb{Z}$.

Capítulo 1

Preliminares

O presente capítulo tem por objetivo estabelecer a linguagem que será adotada ao longo da tese. O ponto de partida é o conceito de álgebra, passando, logo em seguida, à noção de PI-álgebras. Em todo o texto, o símbolo F denotará um corpo e todos os espaços vetoriais e álgebras serão sobre F. Optamos por uma breve exposição desses conceitos, evitando demonstrar os fatos apresentados. Para um maior aprofundamento dos conceitos aqui trazidos recomendamos [20, 23, 24, 25, 33].

1.1 Álgebras

Definição 1.1.1 *Seja $\mathcal{A}$ um espaço vetorial sobre F. Definimos um par $(\mathcal{A}, *)$ como sendo uma F-álgebra (ou álgebra sobre F) se "$*$" é uma operação bilinear em $\mathcal{A}$, isto é, $* : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaz:*

i) $a * (b + c) = a * b + a * c$;

ii) $(a + b) * c = a * c + b * c$;

iii) $(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b)$,

para quaisquer a, b, $c \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in F$.

Na definição acima, "$*$" é dita *multiplicação* da álgebra $\mathcal{A}$ e, simplesmente, denotaremos o produto $a * b$ por justaposição ab, para quaisquer a, $b \in \mathcal{A}$. Mais ainda, escreveremos simplesmente $\mathcal{A}$ em lugar de $(\mathcal{A}, *)$ para denotar a estrutura de álgebra, deixando implícita a multiplicação. Diremos que "$\mathcal{A}$ é uma álgebra" ao invés de "F-álgebra", deixando implícito o corpo F. Definimos o produto $a_1a_2a_3$ como sendo $(a_1a_2)a_3$ e, indutivamente, o produto $a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n$ como sendo $(a_1a_2\ldots a_{n-1})a_n$, para $a_i \in \mathcal{A}$. Diremos que um subconjunto β de $\mathcal{A}$ é uma *base* da álgebra se é uma base do espaço vetorial $\mathcal{A}$, e definimos a *dimensão* de $\mathcal{A}$ como sendo a dimensão de $\mathcal{A}$ visto como F-espaço vetorial. Diremos, ainda, que $\mathcal{A}$ é:

- *associativa* se $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer a, b, $c \in \mathcal{A}$.
- *comutativa* se $ab = ba$, para quaisquer a, $b \in \mathcal{A}$.
- *unitária* (ou *com unidade*) se o produto possui elemento neutro, ou seja, se existe $1 \in \mathcal{A}$ tal que $1a = a1 = a$, para todo $a \in \mathcal{A}$.
- *álgebra de Lie* se $a^2 = 0$ e $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$ (identidade de Jacobi), para quaisquer a, b, $c \in \mathcal{A}$.

Quando a álgebra $\mathcal{A}$ é unitária, é fácil ver que a unidade 1 é única. Neste caso, identificamos naturalmente o elemento $\lambda 1$ de $\mathcal{A}$ com λ, para todo $\lambda \in F$. Nesse sentido, dizemos que $\mathcal{A}$ contém o corpo F, identificando $\{\lambda 1 : \lambda \in F\}$ com F. Particularmente, se $\mathcal{A}$ for associativa, tem-se que $\mathcal{A}$ é um anel, com respeito à adição e à multiplicação da álgebra $\mathcal{A}$.

No decorrer desta tese, trabalharemos principalmente com álgebras associativas. Portanto, a partir deste momento, adotaremos a expressão *álgebra* como sinônimo de **álgebra associativa com unidade**. Se a álgebra em consideração for sem unidade e isso for essencial, o fato será mencionado explícito. O mesmo se aplicará para álgebras não associativas.

Exemplo 1.1.2 *Considere o espaço vetorial $M_n(F)$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em F, com $n \in \mathbb{N}$. Munido do produto usual de matrizes, $M_n(F)$ é uma F-álgebra associativa com unidade e de dimensão n^2 . Chamamos de* ***matrizes unitárias*** *as matrizes E_{ij}, para $1 \leq i, j \leq n$, onde E_{ij} é a matriz cuja única entrada não nula é 1 na i-ésima linha e j-ésima coluna. Claramente, o conjunto $\beta = \{E_{ij} \in M_n(F) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ é uma base para $M_n(F)$. Não é difícil ver que se $E_{ij}, E_{kl} \in M_n(F)$, então $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, onde δ_{ij} denota o delta de Kronecker.*

Exemplo 1.1.3 *Seja L um espaço vetorial com base enumerável $\beta = \{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$, sobre um corpo de característica diferente de 2. Definimos a álgebra de Grassmann (ou álgebra exterior) de L, denotada por E, como sendo a álgebra com base*

$$\beta_E = \{1, e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_k, k \geq 1\}$$

e cujo produto é definido pela lei associativa e pelas relações $e_i e_j = -e_j e_i$, para quaisquer i, $j \in \mathbb{N}$. Ressaltamos em E os subespaços vetoriais

$$E_{(0)} = span_F\{1, e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_m} \mid m \text{ par } \} \text{ e}$$

$$E_{(1)} = span_F\{e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_n} \mid n \text{ ímpar } \}$$

É fácil verificar que $E = E_{(0)} \oplus E_{(1)}$ e

$$(e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_m})(e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_n}) = (-1)^{mn} (e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_n})(e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_m}),$$

para quaisquer m, $n \in \mathbb{N}$.

De forma inteiramente análoga, podemos construir a álgebra de Grassmann sem unidade.

Definição 1.1.4 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Dizemos que um subespaço vetorial B de $\mathcal{A}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$ se $BB \subset B$ e $1 \in B$. Dizemos que um subespaço vetorial I de $\mathcal{A}$ é um ideal de $\mathcal{A}$ se ocorrem $\mathcal{A}I \subset I$ e $I\mathcal{A} \subset I$.*

Exemplo 1.1.5 *Seja E a álgebra de Grassmann já citada. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o subespaço Λ_n de E gerado pelos elementos*

$$\{1, e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} \mid i_1 < i_1 < \cdots < i_k \leq n\}.$$

É fácil ver que Λ_n é uma subálgebra de E de dimensão 2^n. Geralmente, ela é chamada de álgebra de Grassmann de dimensão finita nos geradores $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Exemplo 1.1.6 *Fixe uma álgebra associativa $\mathcal{A}$ e defina*

$$Z(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \mid ax = xa \text{ para todo } x \in \mathcal{A}\}.$$

É fácil verificar que $Z(\mathcal{A})$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$, chamada ***centro de*** $\mathcal{A}$*. Particularmente, quando F tem característica diferente de 2, temos que $Z(E) = E_{(0)}$, onde E denota a álgebra de Grassmann de dimensão infinita.*

Exemplo 1.1.7 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $S \subset \mathcal{A}$. Consideremos o subespaço B_S de $\mathcal{A}$ gerado por $\{1, s_1 \cdots s_k \mid k \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$. É claro que B_S é multiplicativamente fechado e que $1 \in B_S$. Logo B_S é uma subálgebra de $\mathcal{A}$, chamada de subálgebra gerada por S. É fácil ver que esta é a menor subálgebra de $\mathcal{A}$ contendo S.*

Definição 1.1.8 *Sejam $\mathcal{A}$ e B álgebras. Dizemos que uma transformação linear $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras se $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathcal{A}$ e $\varphi(1) = 1$.*

De forma inteiramente análoga, definimos os conceitos de **endomorfismo**, **isomorfismo** e **automorfismo** de álgebras.

Dado um homomorfismo de álgebras $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow B$, tem-se que $\ker\varphi = \{x \in \mathcal{A} \mid \varphi(x) = 0\}$ é um ideal de $\mathcal{A}$ e que $Im\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in \mathcal{A}\}$ é uma subálgebra de B. Além disso, temos $\mathcal{A}/\ker\varphi \simeq Im\varphi$.

1.2 Identidades polinomiais

Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ um conjunto enumerável de variáveis não-comutativas. Chamamos de *palavra* a toda sequência $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$, onde $k \in \mathbb{N}$ e $x_{i_j} \in X$. A palavra vazia será denotada por 1. A partir disso, defina $F\langle X\rangle$ como o espaço vetorial que tem como base todas as palavras em X. Dessa forma, os elementos de $F\langle X\rangle$, chamados de *polinômios*, são somas (formais) de termos (ou monômios) que são produtos (formais) de um escalar por uma palavra em X. Considere em $F\langle X\rangle$ a multiplicação definida por

$$(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k})(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}.$$

Esse produto torna $F\langle X\rangle$ uma F-álgebra associativa e unitária. Tomemos agora uma álgebra associativa unitária $\mathcal{A}$ e uma aplicação qualquer $h : X \longrightarrow \mathcal{A}$, com $h(x_i) = a_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. A partir disso, defina a aplicação linear $\varphi_h : F\langle X\rangle \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $\varphi_h(1) = 1$ e $\varphi_h(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}) = a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}$. Veja que φ_h é um homomorfismo de álgebras e é o único satisfazendo $\varphi_h|_X = h$. Por este motivo, dizemos que $F\langle X\rangle$ é a *álgebra associativa livre unitária livremente gerada por X*. Dado $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$, denotamos por $f(a_1, \ldots, a_n)$ a imagem de $f(x_1, \ldots, x_n)$ por φ_h. Perceba que $f(a_1, \ldots, a_n)$ é obtido trocando-se x_i por a_i em f.

Sendo x_1, x_2 variáveis em X, o polinômio $[x_1, x_2]$ dado por $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ é chamado de *comutador de tamanho 2*. De forma mais geral, sendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variáveis em X, definimos o *comutador de tamanho n* indutivamente por $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n]$.

Definição 1.2.1 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Dizemos que um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ (ou a expressão $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$) é uma identidade polinomial de $\mathcal{A}$ se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$. Neste caso, dizemos que $\mathcal{A}$ satisfaz a identidade $f(x_1, \ldots, x_n)$.*

Em algumas ocasiões abusaremos da notação, dizendo que $\mathcal{A}$ satisfaz a identidade $f = 0$.

Iremos denotar por $T(\mathcal{A})$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de $\mathcal{A}$. Observe que $T(\mathcal{A}) \neq \emptyset$, pois $0 \in T(\mathcal{A})$. Se $T(\mathcal{A}) \neq 0$, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma *álgebra com identidade polinomial* ou *PI-álgebra*. Duas álgebras $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são ditas *PI-equivalentes* se $T(\mathcal{A}_1) = T(\mathcal{A}_2)$.

Exemplo 1.2.2 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra comutativa. Então, $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$ é uma identidade polinomial de $\mathcal{A}$.*

Exemplo 1.2.3 *A álgebra de Grassmann (de dimensão infinita ou finita) E satisfaz a identidade $[x_1, x_2, x_3]$. Para ver isso, basta notar que $[a, b] \in Z(E)$ para quaisquer a, $b \in E$.*

Exemplo 1.2.4 *Sendo S_n o grupo simétrico sobre n elementos, defina o seguinte polinômio*

$$s_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

onde $(-1)^\sigma$ denota o sinal da permutação σ.

Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de dimensão finita n, e $k > n$, então $\mathcal{A}$ satisfaz a identidade $s_k(x_1, \ldots, x_k)$. De fato, escrevendo os elementos de $\mathcal{A}$ como combinação linear dos *elementos de uma base fixa, e substituindo em* s_k*, obteremos uma combinação linear de valores de* s_k *sobre elementos da base dada. Agora observamos que se duas variáveis de* s_k *assumem valores iguais, a expressão assume valor zero. Como temos* n *vetores na base e* $k > n$ *variáveis, sempre repetiremos pelo menos um elemento da base.*

Um conhecido teorema, chamado de Teorema de Amitsur–Levitzki, assegura que $s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) \in T(M_n(F))$*. Observe que se* $n > 2$*, temos* $2n < n^2$*. Para mais detalhes sobre o Teorema de Amitsur e Levitzki, ver por exemplo [20, 16].*

Os seguintes conceitos são cruciais na teoria das álgebras com identidades polinomiais.

Definição 1.2.5 (T**-ideal)** *Dizemos que um ideal* $I \subset F\langle X\rangle$ *é um* T*-ideal se* $\varphi(I) \subset I$ *para todo* $\varphi \in End(F\langle X\rangle)$*. Equivalentemente, um ideal* I *é um* T*-ideal se, para quaisquer* $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ *e* $g_1, \ldots, g_n \in F\langle X\rangle$*, tivermos* $f(g_1, \ldots, g_n) \in I$*.*

Proposição 1.2.6 *Se* $\mathcal{A}$ *é uma álgebra, então* $T(\mathcal{A})$ *é um* T*-ideal de* $F\langle X\rangle$*. Reciprocamente, se* I *é um* T*-ideal de* $F\langle X\rangle$*, então existe alguma álgebra* B *tal que* $T(B) = I$*.*

Observação 1.2.7 *A respeito de* T*-ideais, apresentamos as seguintes observações:*

- *A interseção de uma família arbitrária de* T*-ideais é ainda um* T*-ideal.*
- *Dado* $S \subset F\langle X\rangle$ *qualquer, definimos o* T*-ideal gerado por* S *como sendo a interseção de todos os* T*-ideais de* $F\langle X\rangle$ *que contêm* S*. Denotaremos tal* T*-ideal por* $\langle S\rangle^T$*.*
- *Nesse contexto, veja que* $\langle S\rangle^T$ *é o menor* T*-ideal de* $F\langle X\rangle$ *contendo* S*.*

Na prática, o T-ideal gerado por S coincide com o subespaço vetorial de $F\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto $\{h_1 f(g_1, \ldots, g_n)h_2 \mid f \in S, h_1, h_2, g_1, \ldots, g_n \in F\langle X\rangle\}$.

Sendo $\mathcal{A}$ uma álgebra e $S \subset T(\mathcal{A})$, dizemos que S é uma base para as identidades de $\mathcal{A}$ se $T(\mathcal{A}) = \langle S\rangle^T$. Se existe S finito nessas condições, dizemos que $\mathcal{A}$ tem a *propriedade de base finita* ou a *propriedade de Specht*. O conhecido *problema de Specht* consiste em saber se toda álgebra associativa em característica zero tem a propriedade de base finita. Em [29], Kemer deu uma resposta afirmativa a essa questão. Veremos alguns exemplos concretos de T-ideais no que segue. Aqui cabe o seguinte comentário. Uma álgebra $\mathcal{A}$ satisfaz a *propriedade de Specht* se seu T-ideal $T(\mathcal{A})$ é finitamente gerado e todo T-ideal J com $T(\mathcal{A}) \subseteq J$ também é finitamente gerado.

Exemplo 1.2.8 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra comutativa e com unidade sobre um corpo infinito. Então temos que $T(\mathcal{A}) = \langle [x_1, x_2] \rangle^T$.*

Exemplo 1.2.9 *Seja E a álgebra de Grassmann sobre um corpo infinito de característica diferente de 2. Então $T(E) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$.*

Exemplo 1.2.10 *Considere F um corpo de característica zero. Em 1973, Razmyslov [38] mostrou um conjunto gerador com nove identidades para $T(M_2(F))$. Posteriormente, Drensky [15] reduziu o número de geradores, provando que $T(M_2(F)) = \langle s_4(x_1, x_2, x_3, x_4), [[x_1, x_2]^2, x_3] \rangle^T$. O mesmo problema foi resolvido em [30], com a suposição apenas de o corpo base ser infinito e de característica diferente de 2. Não se sabe se, em característica 2, $T(M_2(F))$ é finitamente gerado ou não.*

1.3 Variedades e álgebras livres

Definição 1.3.1 *Seja S um subconjunto de $F\langle X \rangle$. A classe de todas as álgebras que têm todos os polinômios de S como identidades é chamada de variedade (de álgebras associativas) definida por S.*

Se $\mathfrak{B}$ é uma classe de álgebras, seja $T(\mathfrak{B})$ a interseção de todos os T-ideais $T(\mathcal{A})$, com $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}$. A variedade de álgebras definida por $T(\mathfrak{B})$ é chamada de *variedade gerada por* $\mathfrak{B}$ e denotada por $var\mathfrak{B}$. Caso $\mathfrak{B} = \{R\}$, denotaremos $var\mathfrak{B}$ apenas por $var R$. É claro que a variedade definida por S coincide com a variedade definida por $\langle S \rangle^T$.

Teorema 1.3.2 (Birkhoff) *Uma classe não vazia de álgebras $\mathfrak{B}$ é uma variedade se, e somente se, é fechada por produtos diretos, subálgebras e álgebras quocientes.*

Demonstração: Ver em [16], página 24. ■

Definição 1.3.3 *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras. Dizemos que uma álgebra $\mathcal{F}$ é uma álgebra relativamente livre de $\mathcal{V}$ (de posto enumerável) se existe um subconjunto Y (enumerável) gerador de $\mathcal{F}$ tal que para toda álgebra $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ e toda aplicação $h : Y \longrightarrow \mathcal{A}$, existe um homomorfismo $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{A}$ estendendo h. Neste caso, dizemos que $\mathcal{F}$ é livremente gerada por Y.*

Teorema 1.3.4 *Toda variedade $\mathcal{V}$ possui alguma álgebra relativamente livre. Além disso, duas álgebras relativamente livres de $\mathcal{V}$, do mesmo posto, são isomorfas.*

Demonstração: Ver em [16], página 23. ■

1.4 Álgebras envolventes

Sendo $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa, definamos o produto dado por $[a, b] = ab - ba$, para quaisquer a, $b \in \mathcal{A}$. Denotaremos esta nova álgebra por $\mathcal{A}^{(-)}$. Este novo produto é anticomutativo e é fácil ver que ele satisfaz a identidade de Jacobi, assim temos que $A^{(-)}$ é uma álgebra de Lie. Se uma álgebra de Lie L é isomorfa a uma subálgebra de $A^{(-)}$, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma *álgebra envolvente* de L.

Exemplo 1.4.1 *Considere L a álgebra de Lie com base $\{u, v\}$ tal que $u * v = v$. A álgebra de matrizes $M_2(F)$ é uma álgebra envolvente de L, pois o subespaço vetorial V de $M_2(F)$ gerado por $\{E_{11}, E_{12}\}$ é uma subálgebra de $M_2(F)^{(-)}$ e a aplicação linear $\varphi : L \longrightarrow V$ que satisfaz $\varphi(u) = E_{11}$ e $\varphi(v) = E_{12}$ é um isomorfismo de álgebras de Lie.*

Seja L uma álgebra de Lie. Dizemos que uma álgebra associativa U é uma *álgebra universal envolvente* de L se L é uma subálgebra de $U^{(-)}$ e para toda álgebra associativa $\mathcal{A}$ e todo homomorfismo $\phi : L \longrightarrow \mathcal{A}^{(-)}$ de álgebras de Lie, existe um único homomorfismo de álgebras associativas $\psi : U \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $\psi|_L = \phi$.

Podemos expressar a propriedade da álgebra universal envolvente graficamente da maneira abaixo.

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{A}^{(-)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \overset{\psi}{\dashrightarrow} & \mathcal{A} \end{array}$$

Teorema 1.4.2 (Poincaré, Birkhoff, Witt) *Toda álgebra de Lie L possui uma única (a menos de isomorfismo) álgebra universal envolvente $U(L)$. Se L possui uma base $\{e_i \mid i \in I\}$ (com I totalmente ordenado), então $U(L)$ possui uma base formada pelos elementos*

$$e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_p},$$

com $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_p$, $i_k \in I$ e $p = 0, 1, 2, \ldots$, onde $p = 0$ produz a unidade de $U(L)$.

Demonstração: Ver [16], página 11. ■

Sendo $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, defina $ComX = \{[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}] \mid k \geq 2, x_{i_j} \in X\}$. Sejam $B(X)$ a subálgebra unitária de $F\langle X\rangle$ gerada por $ComX$ e $L(X)$ o subespaço vetorial de $F\langle X\rangle$ gerado por $X \cup ComX$. Os polinômios de $B(X)$ são chamados de *polinômios próprios*.

Vamos trabalhar agora com a álgebra $F\langle X\rangle^{(-)}$. Decorre da identidade de Jacobi que se $u,\ v \in X \cup ComX$, então $[u,v] \in L(X)$. Assim, $L(X)$ é uma subálgebra de Lie de $F\langle X\rangle^{(-)}$.

Teorema 1.4.3 $U(L(X)) = F\langle X\rangle$.

Demonstração: Ver [16], página 14. ■

Considere L uma álgebra de Lie e $h : X \longrightarrow L$ uma aplicação qualquer. Seja $\varphi : F\langle X\rangle \longrightarrow U(L)$ a extensão de h. Temos que

$$\varphi([x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}]) = [\varphi(x_{i_1}), \varphi(x_{i_2}), \ldots, \varphi(x_{i_k})],$$

e assim

$$\varphi(L(X)) \subset L.$$

Além disso, é fácil ver que se $f_1,\ f_2 \in L(X)$, então $\varphi([f_1, f_2]) = [\varphi(f_1), \varphi(f_2)]$. Dessa forma, obtemos que $\varphi|_{L(X)} : L(X) \longrightarrow L$ é um homomorfismo de álgebras de Lie estendendo h. Por este motivo, chamamos $L(X)$ de *álgebra de Lie livre*, *livremente gerada por* X.

Agora considere uma base ordenada de $L(X)$ formada pelos elementos

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m, \ldots$$

onde $\{u_1, u_2, u_3, \ldots\} \subset ComX$ é uma base de $[L(X), L(X)]$, o subespaço vetorial de $L(X)$ gerado por $ComX$. Decorre dos teoremas 1.4.2 e 1.4.3 que $F\langle X\rangle$ tem uma base formada pelos elementos

$$x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \cdots x_{i_k}^{n_k} u_{j_1} u_{j_2} \cdots u_{j_q}, k, q, n_i \geq 0 \tag{1.1}$$

onde $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, $j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_q$. É claro que o caso $k = 0$ produz precisamente uma base para $B(X)$ e dado $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$, tem-se

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_a \alpha_a x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} g_a$$

onde $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i \geq 0$, $\alpha_a \in F$ e $g_a \in B(X)$.

Além disso, a independência linear dos elementos em (1.1) garante que esta expressão para f é única.

Com essas observações, encerramos a presente seção. Na próxima, iremos trabalhar os conceitos de polinômios multi-homogêneos e multilineares. Tais polinômios têm uma importante função quando estamos descrevendo o ideal de identidades de álgebras associativas.

1.5 Polinômios multi-homogêneos e multilineares

Definição 1.5.1 *Considere $m \in F\langle X\rangle$ um monômio e $x_i \in X$. Dizemos que*

- *o grau de x_i em m, denotado por $\deg_{x_i} m$, é o número de ocorrências de x_i em m;*
- *um polinômio $f \in F\langle X\rangle$ é homogêneo em x_i se todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i;*
- *um polinômio $f \in F\langle X\rangle$ é multi-homogêneo quando é homogêneo em todas as variáveis.*

Seja $m = m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ um monômio em $F\langle X\rangle$. Definimos o *multigrau* de m como sendo a k-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, onde $a_i = \deg_{x_i} m$. Para cada $f \in F\langle X\rangle$, a soma de todos os monômios de f com um dado multigrau é dita ser uma *componente multi-homogênea* de f. Disto segue que f é multi-homogêneo se, e somente se, possui uma única componente multi-homogênea.

Os polinômios multi-homogêneos têm um papel importante no estudo das identidades polinomiais, como veremos posteriormente.

Proposição 1.5.2 *Sejam I um T-ideal de $F\langle X\rangle$ e $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in I$. Se o corpo F é infinito, então cada componente multi-homogênea de f pertence a I. Consequentemente, I é gerado por seus polinômios multi-homogêneos.*

Definição 1.5.3 *Dizemos que um polinômio $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ é multilinear se for multi-homogêneo de multigrau $(1, 1, \ldots, 1)$.*

Observação 1.5.4 *Dizer que f é multilinear equivale a dizer que em cada monômio de f cada variável ocorre sempre com grau 1. Neste caso, f pode ser escrito como*

$$\sum_{\sigma\in S_k} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(k)}, \text{ com } \alpha_\sigma \in F.$$

Proposição 1.5.5 *Se I é um T-ideal de $F\langle X\rangle$ e F é um corpo de característica zero, então I é gerado por seus polinômios multilineares.*

Observação 1.5.6 *Denotaremos por V_n o subespaço vetorial de $F\langle X\rangle$ gerado por todos os monômios multilineares nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. De acordo com a proposição anterior, sendo $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa em característica zero, descrever $T(\mathcal{A})$ é equivalente a descrever $T(\mathcal{A}) \cap V_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

1.6 Graduações de grupos em álgebras associativas

Nesta seção, estaremos sempre lidando com álgebras associativas e o símbolo G denotará um grupo qualquer, para o qual adotaremos a notação multiplicativa.

Abaixo, daremos ênfase ao conceito de G-graduação sobre uma álgebra $\mathcal{A}$, o qual desempenhará um importante papel posteriormente.

Definição 1.6.1 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa e G um grupo arbitrário. Definimos uma G-graduação em $\mathcal{A}$ como sendo uma família $(A_g)_{g\in G}$ de subespaços vetoriais de $\mathcal{A}$ tais que*

$$\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g \text{ e } A_gA_h \subset A_{gh}$$

para quaisquer g, $h \in G$. Neste caso, dizemos que a álgebra $\mathcal{A}$ é G-graduada.

Chamamos os subespaços A_g de *componentes homogêneas* e os seus elementos de *elementos homogêneos de grau g*. Quando $a \in A_g$, escrevemos $\alpha(a) = g$ para significar que a é um elemento homogêneo de grau g. A componente homogênea A_1 é denominada *componente neutra* (ou componente neutral) da G-graduação, onde 1 denota o elemento neutro de G. Sendo H um subgrupo de G, é fácil ver que a soma $\sum_{h\in H} A_h$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Em particular, fazendo $H = \{1\}$, decorre que a componente neutra A_1 é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Quando o grupo G for abeliano e finito, dizemos que a G-graduação é abeliana e finita.

Observação 1.6.2 *Se* $E = \oplus_{g\in G} E_g$ *é uma* G*-graduação na álgebra de Grassmann e* $a \in E$*, a notação* $\|a\| = g$ *é usada com o mesmo sentido de* $\alpha(a) = g$*. Tal notação será bastante usada nos capítulos seguintes.*

Exemplo 1.6.3 *Toda álgebra* $\mathcal{A}$ *admite uma* G*-graduação. Com efeito, definindo* $A_1 = \mathcal{A}$ *e* $A_g = \{0\}$ *para todo* $g \in G - \{1\}$*, temos em* $\mathcal{A}$ *uma* G*-graduação. Uma graduação deste tipo é chamada de* G***-graduação trivial****.*

Exemplo 1.6.4 *Uma álgebra* $\mathbb{Z}_2$*-graduada é chamada de* ***superálgebra****. A decomposição natural* $E_{can} = E_{(0)} \oplus E_{(1)}$ *para a álgebra de Grassmann (definida no Exemplo 1.1.3) é um exemplo de superálgebra.*

Exemplo 1.6.5 (Graduação de Vasilovsky) *Considere a* F*-álgebra* $M_2(F)$ *e os subespaços*

$$M_2(F)_{\overline{0}} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in F \right\} \quad e \quad M_2(F)_{\overline{1}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in F \right\}.$$

É fácil ver que $M_2(F) = M_2(F)_{\overline{0}} \oplus M_2(F)_{\overline{1}}$ *define uma* $\mathbb{Z}_2$*-graduação em* $M_2(F)$*. Mais geralmente, sendo* $n \in \mathbb{N}$*,* $n > 1$*, considere a álgebra* $M_n(F)$*. Para cada* $\gamma \in \mathbb{Z}_n$*, definamos* $M_\gamma = span_F\{E_{ij} \mid \overline{j - i} = \gamma\}$*. Mostra-se, com um cálculo direto, que a família* $(M_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{Z}_n}$ *é uma* $\mathbb{Z}_n$*-graduação em* $M_n(F)$*.*

Exemplo 1.6.6 *Sejam* $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g$ *uma álgebra* G*-graduada e* $a \in \mathcal{A}$ *um elemento homogêneo, com* $a \neq 0$*. Se* a *é idempotente, isto é,* $a^2 = a$*, tem-se que* $a \in A_1$*.*

Exemplo 1.6.7 *Sendo* $\mathcal{A}$ *uma álgebra* G*-graduada com unidade* 1*, tem-se que a unidade* 1 *é homogênea e que* $1 \in A_1$*. De fato, existem* $g_1, \ldots, g_n \in G$ *tais que*

$$1 = a_1 + a_{g_1} + \cdots + a_{g_n}$$

com $a_1 \in A_1$*,* $a_{g_j} \in A_{g_j}$*. Tomando* $h \in G$ *e* $a_h \in A_h$ *arbitrários, temos*

$$a_h = a_h a_1 + a_h a_{g_1} + \cdots + a_h a_{g_n}.$$

Daí, segue que $a_h a_{g_j} = 0$ *e* $a_h a_1 = a_h$*, donde* $1 = a_1 \in A_1$*.*

Aqui ressaltamos que o exemplo anterior não se aplica diretamente apesar de o elemento 1 ser um idempotente, pois não se sabe de antemão se ele é homogêneo. No raciocínio acima deduzimos que 1 é homogêneo e $1 \in A_1$*.*

Definição 1.6.8 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g$ uma G-graduação. O conjunto*

$$Sup(\mathcal{A}) = \{g \in G \mid A_g \neq 0\}$$

*é chamado de **suporte da álgebra** $\mathcal{A}$ (ou, às vezes, suporte da graduação de $\mathcal{A}$).*

Definição 1.6.9 *Seja B um subespaço vetorial de uma álgebra $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g$ G-graduada. Dizemos que B é homogêneo na G-graduação ou G-graduado quando $B = \oplus_{g\in G} B_g$, onde $B_g = B \cap A_g$. Enuncia-se definição análoga no caso em que B é uma subálgebra ou um ideal de $\mathcal{A}$.*

Exemplo 1.6.10 *Sejam $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada e $B = \oplus_{g\in G} B_g$ uma subálgebra homogênea na G-graduação. Assim, se $b = \sum b_g \in B$ devemos ter $b_g \in B$ e reciprocamente.*

Exemplo 1.6.11 *Sejam $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} \mathcal{A}_g$ uma álgebra G-graduada e I um ideal homogêneo na G-graduação. Tem-se que a álgebra $\mathcal{A}/I$ é naturalmente G-graduada, onde as componentes homogêneas são $(\mathcal{A}/I)_g = \{a + I \mid a \in A_g\}$.*

Exemplo 1.6.12 *Sejam $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g$ uma G-graduação e a, $b \in A_1$. É fácil ver que $B = a\mathcal{A}b$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Afirmamos que B é homogênea na G-graduação. Com efeito, um elemento típico de B tem a forma $a(\sum x_g)b$, onde $x_g \in A_g$. Claramente, $ax_gb \in B$. Ademais, $ax_gb \in A_1A_gA_1 \subset A_g$. Daí $B = \oplus_{g\in G} B_g$, onde $B_g = A_g \cap B$.*

Exemplo 1.6.13 *Sejam G um grupo, H um subgrupo normal de G e $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada. Sendo $\overline{G} = G/H$, a G-graduação inicial induz uma $\overline{G}$-graduação em $\mathcal{A}$. Para isso, sendo $\overline{g} \in \overline{G}$, definimos $A_{\overline{g}} = \oplus_{h\in H} A_{gh}$. Demonstra-se facilmente que $\mathcal{A} = \oplus_{\overline{g}\in\overline{G}} A_{\overline{g}}$ define uma $\overline{G}$-graduação.*

Observação 1.6.14 *Nos próximos capítulos, estaremos interessados nas graduações da álgebra de Grassmann E. Ressaltamos, novamente, que a decomposição $E_{can} = E_{(0)} \oplus E_{(1)}$ em parcelas correspondentes aos monômios de tamanho par e ímpar, é uma $\mathbb{Z}_2$-graduação em E, a qual chamamos de* graduação canônica.

*Dizemos que uma dada graduação em E é uma **graduação homogênea** se todos os geradores do espaço vetorial definindo E são homogêneos.*

Definição 1.6.15 *Sejam G um grupo e $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g$, $\mathcal{A}' = \oplus_{g\in G} A'_g$ duas álgebras G-graduadas.*

1. *Um homomorfismo de álgebras $\varphi : A \to A'$ é um homomorfismo G-graduado se cumpre $\varphi(A_g) \subset A'_g$, para todo $g \in G$. Analogamente, definimos endomorfismo, isomorfismo e automorfismo G-graduado. No caso de um isomorfismo G-graduado, claramente vale $\varphi(A_g) = A'_g$.*

2. *Dizemos que duas G-graduações $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A_g$ e $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G} A'_g$ na álgebra $\mathcal{A}$ são isomorfas (ou equivalentes) quando existe um automorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ o qual é G-graduado, isto é, $\varphi(A_g) = A'_g$, para todo $g \in G$.*

Aqui comentaremos que o conceito de *equivalência* de duas graduações é muito mais geral. Como nesta tese não trabalharemos com tal situação mais geral, omitiremos os detalhes e nos referimos aos trabalhos citados abaixo.

A noção de equivalência de graduações é um conceito importante em PI-Teoria. As graduações de grupos em várias álgebras importantes têm sido estudadas e classificadas, ver [6, 7, 42, 43, 44] e as respectivas referências nesses trabalhos.

1.7 Identidades polinomiais graduadas

Agora vamos expor, brevemente, o conceito de identidades polinomiais graduadas para álgebras graduadas. A ideia aqui é ter uma variante das identidades ordinárias de modo que possamos, a partir das identidades graduadas, obter informações sobre o caso ordinário. Ao longo de toda a seção, G denotará um grupo abeliano qualquer e usaremos notação multiplicativa. (Aqui mencionamos que identidades graduadas podem ser definidas, da mesma maneira que faremos a seguir, para quaisquer grupos, não necessariamente finitos nem abelianos. Como não precisaremos de tais conceitos mais gerais, preferimos nos ater ao necessário para nossa exposição, assim tornando-a mais enxuta e concreta.)

Para cada $g \in G$, considere um conjunto X_g enumerável e suponhamos que se $g_1 \neq g_2$, então X_{g_1} e X_{g_2} são disjuntos. Seja $X = \cup_{g\in G} X_g$ e considere a álgebra livre $F\langle X\rangle$. Vamos estabelecer uma G-graduação em $F\langle X\rangle$. Para isso, dado $m = x_1 x_2 \cdots x_n$ um monômio qualquer de $F\langle X\rangle$, definimos:

$$\alpha(1) = 1 \text{ e } \alpha(x_1x_2\cdots x_n) = \alpha(x_1)\cdots\alpha(x_n),$$

onde $\alpha(x_i) = g$, se $x_i \in X_g$.

Agora, para cada $g \in G$, seja

$$F\langle X\rangle_g = \langle m \mid m \text{ é monômio e } \alpha(m) = g\rangle.$$

Claramente

$$F\langle X\rangle = \bigoplus_{g\in G} F\langle X\rangle_g$$

é uma G-graduação, a qual será chamada de *álgebra associativa livre G-graduada.* Caso $f \in F\langle X\rangle_g$, dizemos que f é homogêneo de grau g e denotamos por $\alpha(f) = g$.

Definição 1.7.1 *Seja $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G}\mathcal{A}_g$ uma álgebra G-graduada. Dizemos que o polinômio $f(x_1,\ldots,x_n) \in F\langle X\rangle$ é uma identidade polinomial G-graduada de $\mathcal{A}$ se $f(a_1,\ldots,a_n) = 0$, para quaisquer $a_i \in A_{\alpha(x_i)}$, com $i = 1,\ldots,n$.*

Assim como no caso ordinário, no contexto de álgebras G-graduadas, também temos a noção de ideal de identidades graduadas, os T_G-ideais. Veremos isso no que segue.

Definição 1.7.2 *Seja $F\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre G-graduada. Um ideal I de $F\langle X\rangle$ é dito ser um T_G-ideal se $\varphi(I) \subset I$ para todo endomorfismo G-graduado φ de $F\langle X\rangle$.*

Observação 1.7.3 *A respeito de T_G-ideais, temos as seguintes observações.*

- *Dizer que o ideal I é um T_G-ideal equivale a dizer que $f(g_1,\ldots,g_n) \in I$ para quaisquer $f(x_1,\ldots,x_n) \in I$ e $g_i \in F\langle X\rangle_{\alpha(x_i)}$, com $i = 1,\ldots,n$.*

- *De forma análoga ao caso ordinário, dado $S \subset F\langle X\rangle$, denotamos por $\langle S\rangle_{T_G}$ o T_G-ideal gerado por S.*

- *Sendo $\mathcal{A}$ uma álgebra G-graduada, o conjunto $T_G(\mathcal{A})$ das identidades G-graduadas da álgebra $\mathcal{A}$ é um T_G-ideal de $F\langle X\rangle$.*

- *Todo T_G-ideal é gerado por seus polinômios multi-homogêneos, no caso de o corpo ser infinito, e por seus polinômios multilineares, no caso de o corpo ser de característica zero.*

- *Quando $G = \mathbb{Z}_n$, para algum $n = 2, 3, \ldots$, e $\mathcal{A}$ é $\mathbb{Z}_n$-graduada, denotamos $T_{\mathbb{Z}_n}(\mathcal{A})$ simplesmente por $T_n(\mathcal{A})$. Neste caso, fala-se em T_n-ideal de identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$-graduadas.*

As demonstrações desses fatos repetem palavra por palavra as do caso ordinário. Para não abusar da paciência do leitor, decidimos omitir essas demonstrações.

Exemplo 1.7.4 *Considere a álgebra de Grassmann E sobre um corpo de característica zero dotada de sua $\mathbb{Z}_2$-graduação natural. Seja $F\langle X\rangle$ a álgebra livre $\mathbb{Z}_2$-graduada. Vamos escrever $X = Y \cup Z$, com $\alpha(y) = 0$ e $\alpha(z) = 1$ para quaisquer $y \in Y$ e $z \in Z$. É fácil ver que $f(z_1, z_2) = z_1z_2 + z_2z_1$ e $g(y_1, y_2) = [y_1, y_2]$ são identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas para E. Mais ainda, temos $T_2(E_{can}) = \langle [y_1, x_2], z_1z_2 + z_2z_1\rangle_{T_2}$, onde $\alpha(x_2) = 0, 1$.*

O seguinte resultado relaciona os conceitos de identidades ordinárias e graduadas.

Teorema 1.7.5 *Sejam $\mathcal{A}$ e B duas álgebras G-graduadas. Se $T_G(\mathcal{A}) \subset T_G(B)$, então $T(\mathcal{A}) \subset T(B)$. Além disso, se $T_G(\mathcal{A}) = T_G(B)$, então $T(\mathcal{A}) = T(B)$.*

Demonstração: Consideremos a álgebra associativa livre $F\langle Y\rangle$, onde $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ e seja $f(y_1, \ldots, y_n) \in T(\mathcal{A})$. Dados $b_1, \ldots, b_n \in B$, tomemos $b_{ig} \in B_g$, para $i = 1, \ldots, n$ e $g \in G$ tais que $b_i = \sum_{g\in G} b_{ig}$. Para cada $b_{ig} \neq 0$, tomemos e consideremos o polinômio $f(\sum_{g\in G} x_{1g}, \ldots, \sum_{g\in G} x_{ng}) \in F\langle X\rangle$. Como $f \in T(\mathcal{A})$, obtemos que $f_1 \in T_G(\mathcal{A})$ e pela hipótese, segue que $f_1 \in T_G(B)$. Fazendo as substituições $x_{ig} = b_{ig}$ para $i = 1, \ldots, n$ e $g \in G$, temos

$$f(b_1, \ldots, b_n) = f(\sum_{g\in G} b_{1g}, \ldots, \sum_{g\in G} b_{ng}) = 0$$

e assim $f \in T(B)$.

Além disso, se $T_G(\mathcal{A}) = T_G(B)$, então $T_G(\mathcal{A}) \subset T_G(B)$ e $T_G(B) \subset T_G(\mathcal{A})$, de onde vem a segunda parte do teorema. ■

Capítulo 2

Breve Revisão sobre Graduações da Álgebra de Grassmann

A finalidade deste capítulo é compilar alguns dos resultados obtidos nos últimos quinze anos sobre graduações e identidades da álgebra de Grassmann. Vários matemáticos têm abordado essa questão e produzido teoremas importantes. Em todos os trabalhos nessa linha, no entanto, as seguintes suposições têm sido feitas sobre as graduações de E:

1. **Homogeneidade dos geradores** $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$.

2. **A finitude do grupo que gradua a álgebra de Grassmann** E.

Digamos que E seja graduada por um grupo G. Quando a graduação $E = \oplus_{g\in G} E_g$ satisfaz a condição 1, iremos chamá-la de G-graduação *homogênea*. Anisimov [3], Di Vincenzo e da Silva [12], Centrone [9], [10], [11] e Di Vincenzo, da Silva e Koshlukov [13] têm obtido resultados nessa direção, os quais serviram como leituras essenciais para a presente tese. Pela similaridade entre a proposta da tese e alguns dos trabalhos supracitados, no que segue vamos expor fatos essenciais para a abordagem que será feita nos capítulos vindouros. Os resultados aqui mencionados são no caso em que a álgebra E é considerada sobre um corpo de característica zero. Lembramos que a $\mathbb{Z}_2$-graduação mais conhecida em E é a $\mathbb{Z}_2$-graduação natural, dada por $E_{can} = E_{(0)} \oplus E_{(1)}$. Para ela, o T_2-ideal de identidades polinomiais graduadas é gerado pelos polinômios $[y_1, y_2]$, $[y_1, z_2]$ e $z_1z_2+z_2z_1$. Uma pergunta que salta aos olhos é: quais as outras estruturas de superálgebra de E homogêneas? Essa pergunta já foi completamente respondida no ano de 2009, como veremos.

2.1 Sobre as $\mathbb{Z}_2$-graduações homogêneas

Em 2009, Di Vincenzo e da Silva abordaram o problema da descrição das $\mathbb{Z}_2$-graduações homogêneas na álgebra de Grassmann. Com a intenção de contextualizar essa temática para os próximos capítulos, vamos exibir as principais ideias contidas no trabalho [12].

Primeiramente, sendo $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ os geradores da álgebra de Grassmann E, consideremos as seguintes possíveis atribuições de $\mathbb{Z}_2$-grau nos geradores:

$$\|e_i\|_k = \begin{cases} 0, & \text{se } i = 1, \ldots, k \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

$$\|e_i\|_{k^*} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = 1, \ldots, k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

e

$$\|e_i\|_\infty = \begin{cases} 0, & \text{se } i \text{ par} \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

A partir daí, em cada caso acima, estendemos o $\mathbb{Z}_2$-grau a qualquer monômio de E, pondo:

$$\|e_{i_1} \cdots e_{i_t}\| = d,$$

onde $d \in \mathbb{Z}_2$ satisfaz

$$d \equiv \|e_{i_1}\| + \cdots + \|e_{i_t}\| \pmod{\mathbb{Z}_2}.$$

Deste processo são obtidas as superálgebras de Grassmann E_k, E_{k^*} e E_∞. A menos de isomorfismos $\mathbb{Z}_2$-graduados, estas são todas as possíveis superálgebras de Grassmann com geradores homogêneos. Note que E_{can} é um caso particular de E_k, quando $k = 0$.

Usando técnicas algébricas, as identidades e codimensões para cada caso acima foram descritas. Nos resultados seguintes, a álgebra E é considerada sobre um corpo F de característica zero.

Teorema 2.1.1 (Di Vincenzo, da Silva, [12]) *Considere a álgebra de Grassmann E sobre um corpo de característica zero. Seja $T_2(E_d)$ o T_2-ideal de identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas para E_d, onde $d = \infty$, k^*. Então,* *1. $T_2(E_\infty)$ é gerado pelos seguintes polinômios:*

- $[x_1, x_2, x_3]$, *para quaisquer graus* $\alpha(x_1)$, $\alpha(x_2)$, $\alpha(x_3)$.

2. $T_2(E_{k^*})$ é gerado pelos seguintes polinômios:

- $[x_1, x_2, x_3]$, *para quaisquer graus* $\alpha(x_1)$, $\alpha(x_2)$, $\alpha(x_3)$.
- $z_1 z_2 \cdots z_{k+1}$, *onde* $\alpha(z_i) = 1$, *para todo* $i = 1, \ldots, k+1$.

Já a descrição das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas para E_k é bem mais trabalhosa. A técnica dos polinômios Y-próprios foi usada para tal descrição.

No Capítulo 4 usaremos técnicas parecidas com às usadas em [12], visando descrever as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas para E.

2.2 Linearização de automorfismos

As graduações por um grupo cíclico finito de ordem prima em E (mais geralmente em qualquer álgebra associativa) são equivalentes a ação de algum automorfismo de ordem finita sobre E, quando o corpo-base é suficientemente "grande". A última restrição é necessária para que o grupo em questão seja isomorfo ao seu grupo de caracteres. Em outras palavras, o corpo base deve conter todas as representações irredutíveis do grupo. Como o grupo é abeliano, ele deverá conter as respectivas raízes da unidade.

Na literatura, há alguns trabalhos que lidam com os automorfismos da álgebra de Grassmann. Nesta seção, discutimos alguns dos resultados de Anisimov [2] e [3], que serão úteis no capítulo seguinte. Aqui cabe ressaltar que as técnicas usadas por Anisimov não lidam explicitamente com graduações e identidades graduadas em E, mas com a noção de grupo dos automorfismos e antiautomorfismos agindo sobre E. Em [1] pode ser encontrado um estudo sobre as codimensões involutivas na álgebra de Grassmann.

Seja φ um automorfismo de ordem 2 da álgebra de Grassmann. Digamos que φ está definido nos geradores por

$$\varphi(e_i) = \sum_j \alpha_{ji} e_j + \sum_{|a_m| \geq 2} \beta_{mi} a_m,$$

onde cada a_m é um monômio de E e $|a_m|$ denota seu tamanho. Consideremos a transformação linear φ_l definida no espaço gerado pelos e_i por

$$\varphi_l(e_i) = \sum_j \alpha_{ji} e_j.$$

Em [2] foi mostrado que φ_l pode ser estendido de forma natural a um automorfismo de ordem 2 de E. Chamaremos φ_l de *linearização* de φ. Claramente, a linearização de φ age linearmente sobre o espaço base L. A menos de mudança de base do espaço L, podemos supor que os geradores de L são autovetores para φ_l, cujos autovalores são necessariamente 1 e -1. Denotando por L_1 e L_{-1} os autoespaços associados a 1 e -1, obtemos a seguinte decomposição do espaço vetorial L:

$$L = L_1 \oplus L_{-1}.$$

É cabível tentar relacionar a $\mathbb{Z}_2$-graduação definida por φ_l com a $\mathbb{Z}_2$-graduação definida por φ (potencialmente mais complicada). Sob algumas hipóteses, de fato, há uma relação próxima entre estas estruturas, como vemos no teorema abaixo.

Chamamos um automorfismo φ de E de *automorfismo do tipo canônico* se φ preserva a $\mathbb{Z}_2$-graduação natural E_{can} de E, ou seja, $\varphi(E_{(i)}) = E_{(i)}$, onde $E_{(i)}$ denota as componentes homogêneas de E_{can}, para $i = 0, 1$. Voltaremos a este conceito no Capítulo 3.

Por ora, vamos enunciar um importante teorema de Anisimov. Ele será bastante útil posteriormente. No resultado abaixo, a álgebra E é considerada sobre corpos de característica zero.

Teorema 2.2.1 (Anisimov) *Seja φ um automorfismo de ordem 2 de E do tipo canônico e suponha que uma das seguintes condições seja satisfeita:*

1. $\dim L_{-1} = l < \infty$ *e* $\prod_{j=1}^{l+1}(\varphi(e_{i_j}) - e_{i_j}) = 0$, *para quaisquer* $l+1$ *geradores* $e_{i_1}, \ldots, e_{i_{l+1}}$.

2. $\dim L_1 = l < \infty$ *e* $\prod_{j=1}^{l+1}(\varphi(e_{i_j}) + e_{i_j}) = 0$, *para quaisquer* $l+1$ *geradores* $e_{i_1}, \ldots, e_{i_{l+1}}$.

Então, em qualquer dos casos, tem-se $T_2(E_\varphi) = T_2(E_{\varphi_l})$.

Demonstração: Ver em [3]. ■

O resultado acima nos diz que, se o automorfismo φ satisfaz certas condições, suas identidades se reduzem a algum dos casos tratados por Di Vincenzo e da Silva [12].

Posteriormente veremos que, via este teorema, as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de uma ampla classe de superálgebras de Grassmann não homogêneas se reduzem às identidades das superálgebras de Grassmann homogêneas.

2.3 Contribuições de Berezin e Makar-Limanov

O prolífero matemático russo Felix Berezin trabalhou intensamente com a noção de automorfismos na álgebra de Grassmann, só que em dimensão finita. Não obstante, sua abordagem se utilizava de ferramentas de Análise e visava aplicações à Física. O compêndio [8] é uma excelente referência acerca das técnicas empregadas por Berezin.

A respeito dos automorfismos na álgebra de Grassmann de dimensão finita, também citamos as contribuições apresentadas por Makar-Limanov, em 1984. Sendo Λ_n a álgebra de Grassmann sobre n geradores, em [35] o autor usa técnicas da Teoria de Grafos para estudar o grupo $Aut(\Lambda_n)$. Ressaltamos, no entanto, que a construção feita não explicita, concretamente, os automorfismos de Λ_n. Recordamos ainda que a abordagem em [35] é mais geral, nela consideram-se álgebras de dimensão finita, onde alguns dos produtos entre os geradores do espaço vetorial L podem ser nulos. Também citamos aqui o artigo [14], o qual aborda a mesma questão.

Vale salientar que a hipótese de finitude da álgebra de Grassmann é fundamental em todos os trabalhos supracitados. Portanto, uma mera adaptação dos resultados em dimensão finita para o caso de dimensão infinita não se mostrou promissora para os nossos objetivos.

Observação 2.3.1 *A ideia mais natural de tentar transportar informações de uma superálgebra de Grassmann de dimensão finita para uma de dimensão infinita é a seguinte. Suponhamos que φ seja um automorfismo de ordem 2 sobre Λ_n, onde Λ_n denota a álgebra de Grassmann nos geradores $\{e_1, \ldots, e_n\}$, com $n \in \mathbb{N}$. Agora consideremos a ação $\tilde{\varphi}$ definida em E por:*

$$\tilde{\varphi}(e_i) = \begin{cases} \varphi(e_i), & se\ i \leq n \\ e_i, & caso\ contrário \end{cases} .$$

É possível mostrar que $\tilde{\varphi}$ pode ser estendida a um homomorfismo de E se, e somente se, o automorfismo φ for do tipo canônico. E, neste caso, é fácil ver que $\tilde{\varphi}$ será um *automorfismo de ordem 2 de E. No capítulo seguinte exibiremos ideias mais gerais para produzir superálgebras de Grassmann de dimensão infinita.*

Capítulo 3

Automorfismos e $\mathbb{Z}_2$-Graduações da Álgebra de Grassmann

O estudo das $\mathbb{Z}_2$-graduações e identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas da álgebra de Grassmann com geradores homogêneos foi completamente realizado por Di Vincenzo e da Silva [40, 12], com a suposição de o corpo base ser de característica zero. A lista de todas as superálgebras de Grassmann homogêneas foi exibida, a saber $\{E_{k^*}, E_\infty, E_k\}$, onde k é um número inteiro não-negativo. Em seguida, as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas para estas superálgebras foram descritas sobre corpos infinitos de característica $p > 2$ [10] e ainda sobre corpos finitos [22].

Também considerando o corpo base de característica zero, ao longo deste capítulo abordaremos o mesmo problema, só que num sentido mais geral. Mais especificamente, construiremos $\mathbb{Z}_2$-graduações na álgebra de Grassmann, só que sem exigir a homogeneidade dos geradores. Contrariamente à nossa intuição, constataremos que uma classe ampla dessas superálgebras não homogêneas é equivalente (como superálgebra) ou, pelos menos, tem as mesmas identidades graduadas de algum caso homogêneo. Quando o conjunto de geradores não homogêneos de uma $\mathbb{Z}_2$-graduação é finito, com uma condição adicional sob a $\mathbb{Z}_2$-graduação e usando como ferramenta o Teorema 2.2.1 de Anisimov, provaremos que suas identidades coincidem com as identidades de algum caso homogêneo. Exibiremos, concretamente, métodos para construir superálgebras de Grassmann não homogêneas com um número infinito e finito de geradores homogêneos. Como uma consequência direta, iremos obter uma $\mathbb{Z}_2$-graduação de E com apenas um gerador homogêneo, mas cuja estrutura é $\mathbb{Z}_2$-isomorfa à superálgebra mais familiar possível, a saber E_{can}. Para a obtenção de tais resultados, a dualidade entre $\mathbb{Z}_2$-graduações e automorfismos de ordem 2 foi exaustivamente explorada. Na parte final do capítulo é feito um estudo das superálgebras de Grassmann em dimensão finita, num caso bem palpável. Para uma álgebra de Grassmann de dimensão 4, exibiremos a lista de todas as suas $\mathbb{Z}_2$-graduações. No entanto, a abordagem utilizada para dimensão 4 não se revela eficiente em dimensões maiores.

3.1 Automorfismos, graduações e sua dualidade

Considerando $\mathcal{A}$ uma F-álgebra associativa, existe uma dualidade natural entre $\mathbb{Z}_2$-graduações e automorfismos de ordem no máximo 2 de $\mathcal{A}$. Ela é dada por

$$\varphi \in Aut(\mathcal{A}), \text{ com } \varphi^2 = 1 \longleftrightarrow \mathcal{A}_\varphi = \mathcal{A}_{0,\varphi} \oplus \mathcal{A}_{1,\varphi},$$

onde as componentes homogêneas são os autoespaços associados aos autovalores 1 e -1 de φ, respectivamente. Aqui ressaltamos que como $\varphi^2 = 1$, sobre qualquer corpo de característica diferente de 2, a transformação linear φ é diagonalizável, isto é, existe uma base que consiste de autovetores de φ (Este fato da álgebra linear elementar é bem conhecido; o resultado independe da dimensão do espaço vetorial onde φ age.) Mais detalhes sobre a dualidade entre graduações e grupo de automorfismos podem ser encontrados, por exemplo, no Capítulo 3 de [20] e no artigo [21].

Para estudar as $\mathbb{Z}_2$-graduações da álgebra E, usaremos sobremaneira esta técnica. Mencionamos que as $\mathbb{Z}_2$-graduações homogêneas de E correspondem aos automorfismos de E definidos nos geradores por

$$\varphi(e_i) = \pm e_i.$$

Sendo $\varphi \in Aut(E)$ com $\varphi^2 = 1$, observe que

$$e_i = \frac{e_i + \varphi(e_i)}{2} + \frac{e_i - \varphi(e_i)}{2}, \text{ para } i \in \mathbb{N}.$$

Escrevendo $a_i = \dfrac{e_i + \varphi(e_i)}{2}$, tem-se que

- $\varphi(e_i) = -e_i + 2a_i$,

- $\varphi(a_i) = a_i$, isto é, a_i tem grau zero na $\mathbb{Z}_2$-graduação E_φ e

- $\varphi(e_i - a_i) = -(e_i - a_i)$, isto é, $e_i - a_i$ tem grau um na $\mathbb{Z}_2$-graduação E_φ.

Definição 3.1.1 *Sejam $\varphi \in Aut(E)$ e $E_{can} = E_{(0)} \oplus E_{(1)}$ a $\mathbb{Z}_2$-graduação natural de E. Dizemos que φ é do tipo canônico se*

1. $\varphi(E_{(0)}) = E_{(0)}$;

2. $\varphi(E_{(1)}) = E_{(1)}$.

Observação 3.1.2 *A respeito de automorfismos canônicos, as seguintes observações são triviais.*

- *Cada uma das superálgebras E_∞, E_{k^*} e E_k corresponde a automorfismos do tipo canônico, definidos por $\varphi(e_n) = \pm e_n$.*

- *Sendo φ um automorfismo de ordem 2 de E, tem-se que φ é do tipo canônico se, e somente se, $a_i = (e_i + \varphi(e_i))/2 \in E_{(1)}$, para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Fixada uma base $\beta = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ do espaço vetorial L e sendo $\varphi \in Aut(E)$ tal que $\varphi^2 = 1$, considere o conjunto

$$I_\beta = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(e_n) = \pm e_n\}.$$

Claramente, existem as seguintes possibilidades:

1. $I_\beta = \mathbb{N}$.

2. $I_\beta \neq \mathbb{N}$ é infinito.

3. I_β é finito e não vazio.

Pode ocorrer de $I_\beta = \emptyset$ e, em outra base β' de L, acontecer $I_{\beta'} \neq \emptyset$ (vide Exemplo 3.4.6). Assim, a quarta possibilidade que complementa as anteriores é:

4. $I_\gamma = \emptyset$, para toda base linear γ de L.

Observe que o caso de automorfismos do tipo 1 já foi inteiramente descrito por Di Vincenzo e da Silva, em 2009, veja [12]. Abordaremos os outros tipos nas próximas subseções.

Chamaremos os automorfismos listados acima (e as respectivas $\mathbb{Z}_2$-graduações) de automorfismos ($\mathbb{Z}_2$-graduações, respectivamente) do tipo 1, tipo 2, tipo 3 e tipo 4. Adiante, iremos obter resultados sobre cada um deles.

3.2 Automorfismos do tipo 2

Iniciamos esta seção com um resultado que fornece um critério para a construção de automorfismos do tipo 2. Como veremos, eles são necessariamente do tipo canônico.

Proposição 3.2.1 *Seja $\varphi \in Aut(E)$ tal que $\varphi^2 = 1$. Suponhamos que φ seja um automorfismo do tipo 2, isto é, $I_\beta \neq \mathbb{N}$ é infinito. Então φ é do tipo canônico.*

Demonstração: Seja $E_\varphi = E_{0,\varphi} \oplus E_{1,\varphi}$ a $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida por φ, denotamos $J = \{j \in \mathbb{N} \mid j \notin I_\beta\}$. Por simplicidade, vamos escrever $I = I_\beta$.

Para cada $j \in J$, temos que $\varphi(e_j) \neq \pm e_j$ e, assim, e_j não é homogêneo na graduação $E_\varphi = E_{0,\varphi} \oplus E_{1,\varphi}$. Sendo assim, podemos escrever

$$e_j = a_j + b_j, \text{ com } a_j \in E_{0,\varphi} \text{ e } b_j \in E_{1,\varphi},$$

onde cada parcela é não nula.

Como $\varphi(b_j) = -b_j$, temos que

$$\varphi(e_j - a_j) = \varphi(b_j) = -b_j = -e_j + a_j,$$

logo $\varphi(e_j) = -e_j + 2a_j$. Vamos provar que cada a_j é soma de monômios de tamanho ímpar. Para isso, escreva

$$a_j = a_j^e + a_j^o,$$

onde a_j^e é a soma de todos os monômios de tamanho par de a_j e a_j^o é a soma de todos os monômios de tamanho ímpar de a_j.

Agora escolha $t \in I$ tal que e_t não pertença ao suporte de nenhuma parcela de a_j^e (essa escolha é possível, pois I é infinito). Uma vez que

$$e_j e_t + e_t e_j = 0,$$

devemos ter

$$\varphi(e_j)\varphi(e_t) + \varphi(e_t)\varphi(e_j) = 0,$$

e, pelo fato de $\varphi(e_t) = \pm e_t$, temos

$$(-e_j + 2a_j)e_t + e_t(-e_j + 2a_j) = 0, \quad \text{logo} \quad a_j e_t + e_t a_j = 0.$$

Obtemos $(a_j^e + a_j^o)e_t + e_t(a_j^e + a_j^o) = 0$. Segue que $e_t a_j^e = 0$ e $a_j^e = 0$.

Portanto, para cada $j \in J$, a parcela a_j é soma de monômios ímpares, provando que φ é do tipo canônico. ■

Fixados uma base β de L e φ um automorfismo do tipo 2 de E, sejam

- $I^+ = \{i \in I \mid \varphi(e_i) = e_i\}$,
- $I^- = \{i \in I \mid \varphi(e_i) = -e_i\}$,
- $J = \{j \in \mathbb{N} \mid j \notin I\}$.

Desde que φ é do tipo 2 , o conjunto $I = I^+ \cup I^-$ é infinito. Temos os subcasos:

S1. $|I^+|$ e $|I^-|$ infinitos.

S2. $|I^+|$ infinito e $|I^-|$ e $|J|$ finitos.

S3. $|I^+|$ infinito, $|I^-|$ finito e $|J|$ infinito.

S4. $|I^+|$ finito, $|I^-|$ infinito e $|J|$ finito.

S5. $|I^+|$ finito, $|I^-|$ infinito e $|J|$ infinito.

Usando as notações anteriores, obtemos os resultados que seguem.

Proposição 3.2.2 *O T_2-ideal de uma superálgebra de Grassmann do tipo S1 coincide com $T_2(E_\infty)$.*

Demonstração: Supondo φ do caso S1, temos que os conjuntos I^+ e I^- são infinitos. Seja B a subálgebra de E_φ gerada por 1, e_n, para todo $n \in I^+ \cup I^-$. Neste caso, temos que $B \subset E_\varphi$ é uma subálgebra homogênea e $B \simeq E_\infty$ (isomorfismo de superálgebras). Logo, $\langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_{T_2} = T_2(E_\infty) \supset T_2(E_\varphi)$, onde $\alpha(x_i) = 0$ ou $\alpha(x_i) = 1$, para todo $i = 1, 2, 3$. Assim, decorre que $T_2(E_\varphi) = T_2(E_\infty)$. ■

Suponhamos agora que estejamos com o caso S2. Após uma possível mudança de índices nos geradores, a definição do automorfismo φ é da forma

$$\varphi(e_n) = \begin{cases} -e_n, \text{ se } 1 \leq n \leq k \\ -e_n + 2a_n, \text{ se } k+1 \leq n \leq k+t \\ e_n, \text{ se } n > k+t \end{cases} .$$

Sendo $E_\varphi = E_{0,\varphi} \oplus E_{1,\varphi}$, note que:

- $E_{0,\varphi} \supset V_0 = span_F\{1, e_n, a_{k+1}, \ldots, a_{k+t} \mid n > k+t\}$.
- $E_{1,\varphi} \supset V_1 = span_F\{e_1, \ldots, e_k, (e_{k+1} - a_{k+1}), \ldots, (e_{k+t} - a_{k+t})\}$.

Observação 3.2.3 *Mais geralmente, $E_{0,\varphi}$ é gerado (como espaço vetorial) por todos os produtos de elementos de V_0 e V_1 com um número par de fatores em V_1. Já $E_{1,\varphi}$ é gerado por tais produtos com um número ímpar de fatores em V_1.*

Seja B a subálgebra de E_φ gerada por $e_1, \ldots, e_k, e_n$, para todo $n > k+t$. Claramente, B é homogênea e

$$E_{k^*} \simeq B \subset E_\varphi.$$

Logo,

$$T_2(E_{k^*}) \supset T_2(E_\varphi).$$

Ademais, como cada translação $(e_{k+1} - a_{k+1}), \ldots, (e_{k+t} - a_{k+t})$ tem quadrado nulo (pois o automorfismo φ é canônico pela Proposição 3.2.1), é fácil ver que

$$z_1 z_2 \ldots z_{k+t+1}$$

é uma identidade polinomial $\mathbb{Z}_2$-graduada para E_φ. Portanto,

$$T_2(E_{k^*}) \supset T_2(E_\varphi) \supset T_2(E_{(k+t)^*}).$$

Sob uma condição adicional nos elementos $a_{k+1}, \ldots, a_{k+t}$, garantimos que $T_2(E_\varphi)$ coincide com o T_2-ideal de alguma $\mathbb{Z}_2$-graduação homogênea. O teorema seguinte é a esse respeito.

Teorema 3.2.4 *Sejam φ um automorfismo em E do tipo $S2$ e $T_2(E_\varphi)$ o seu T_2-ideal de identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas. Se cada elemento $a_{k+1}, \ldots, a_{k+t}$ é soma de monômios de tamanho maior ou igual a 3, então $T_2(E_\varphi) = T_2(E_{\varphi_l})$.*

Demonstração: Por hipótese, sabemos que φ é do tipo $S2$ e assim I^- e J são finitos. Digamos que

$$|I^-| + |J| = l.$$

Pela Proposição 3.2.1, temos que φ é do tipo canônico. Além disso, ocorre que

$$\dim L_{-1} = l < \infty \text{ e } \prod_{j=1}^{l+1}(\varphi(e_{i_j}) - e_{i_j}) = 0, \text{ para quaisquer } l+1 \text{ geradores } e_{i_1}, \ldots, e_{i_{l+1}}.$$

Pelo Teorema 2.2.1, obtemos que $T_2(E_\varphi) = T_2(E_{\varphi_l})$, como queríamos provar. ∎

Seguindo a mesma ideia que foi usada acima, lidamos com o caso de automorfismo do tipo S4.

Teorema 3.2.5 *Sejam φ um automorfismo em E do tipo $S4$ e $T_2(E_\varphi)$ o seu T_2-ideal de identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas. Se cada elemento $a_{k+1}, \ldots, a_{k+t}$ é soma de monômios de tamanho maior ou igual a 3, então $T_2(E_\varphi) = T_2(E_{\varphi_l})$.*

Demonstração: Análoga à demonstração do Teorema 3.2.4. ∎

Para automorfismos satisfazendo S3 e S5 (nos quais J é infinito), suas identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas estão contidas no T_2-ideal de alguma $\mathbb{Z}_2$-graduação homogênea.

Teorema 3.2.6 *Seja φ um automorfismo do tipo 2 de E. Temos que:*

1. *Se φ satisfaz $S3$, então $T_2(E_\varphi) \subset T_2(E_{k^*})$.*

2. *Se φ satisfaz $S5$, então $T_2(E_\varphi) \subset T_2(E_k)$.*

Uma pergunta que se coloca naturalmente é: como construir automorfismos (e $\mathbb{Z}_2$-graduações) do tipo 2? Faremos isso na seção seguinte.

3.2.1 Algoritmo para $\mathbb{Z}_2$-graduações do tipo 2

Iremos exibir um passo a passo de como construir automorfismos do tipo 2 na álgebra de Grassmann. Embora os automorfismos obtidos por este algoritmo não ajam linearmente sobre os geradores, surpreendentemente, veremos que as superálgebras de Grassmann induzidas equivalem às homogêneas.

Considere um conjunto infinito $I \subset \mathbb{N}$ e defina a função $\varphi(e_i) = \pm e_i$, para $i \in I$. Suponha que $I \neq \mathbb{N}$. A partir disso, construa os seguintes conjuntos:

- $I^+ = \{i \in I \mid \varphi(e_i) = e_i\}$.

- $I^- = \{i \in I \mid \varphi(e_i) = -e_i\}$.

- $J = \{j \in \mathbb{N} \mid j \notin I\}$.

Perceba que $I = I^+ \cup I^-$. Para cada $j \in J$, construa um elemento $a_j \in E$ seguindo as instruções abaixo:

1. a_j é combinação linear de monômios de tamanho ímpar.

2. Todo monômio que aparece em a_j tem por fatores geradores que têm índice em I.

3. Em cada monômio que ocorre em a_j, o número de fatores com índice em I^- é par.

Note que o passo a passo anterior é flexível. Para todo $j \in J$, os respectivos a_j podem se repetir ou não. Isso não interfere na construção.

A partir da construção acima, estenda a função para todos os geradores de E, pondo:

$$\varphi(e_i) = \begin{cases} e_i, \text{ se } i \in I^+ \\ -e_i, \text{ se } i \in I^- \\ -e_i + 2a_i, \text{ se } i \in J \end{cases}.$$

É fácil ver que:

- A condição (1) implica que φ pode ser estendido a um endomorfismo de E e

- As condições (2) e (3) implicam $\varphi(a_j) = a_j$ para todo $j \in J$.

Tem-se que φ é um automorfismo de ordem 2. De fato, se $i \in I$, claramente, $\varphi^2(e_i) = e_i$. Caso $j \in J$, temos:

$$\varphi^2(e_j) = \varphi(-e_j + 2a_j) = -(-e_j + 2a_j) + 2a_j = e_j.$$

Portanto, φ é um automorfismo de ordem 2. Sendo $E_\varphi = E_{0,\varphi} \oplus E_{1,\varphi}$ a superálgebra induzida por φ, decorre que

- $E_{0,\varphi} \supset span_F\{e_i, a_j \mid i \in I^+, j \in J\}$ e

- $E_{1,\varphi} \supset span_F\{e_i, (e_j - a_j) \mid i \in I^-, j \in J\}$.

A descrição precisa de cada componente homogênea é feita como na Observação 3.2.3.

Chamaremos o algoritmo anterior de **algoritmo 1**. Note que para cada φ obtido pelo algoritmo 1, a superálgebra E_φ não é homogênea, podendo ter infinitos geradores não homogêneos.

A proposição seguinte classifica as $\mathbb{Z}_2$-graduações que são obtidas do algoritmo 1.

Proposição 3.2.7 *Seja $\varphi \in Aut(E)$ um automorfismo de ordem 2 construído pelo algoritmo 1. Então existe um isomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado entre E_φ e uma das seguintes superálgebras E_∞, E_{k^*} ou E_k.*

Demonstração: Seja $E_\varphi = E_{0,\varphi} \oplus E_{1,\varphi}$ a $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida por um automorfismo φ construído pelo algoritmo 1.

A partir disso, defina $E = E^{(0)} \oplus E^{(1)}$ a $\mathbb{Z}_2$-graduação homogênea induzida por

$$\|e_n\| = 0, \text{ se } n \in I^+,$$

$$\|e_m\| = 1, \text{ caso contrário }.$$

Agora considere a função $f_\varphi \colon E^{(0)} \oplus E^{(1)} \longrightarrow E_\varphi = E_{0,\varphi} \oplus E_{1,\varphi}$ dada por

$$f_\varphi(e_i) = \begin{cases} e_i, \text{ se } i \in I \\ e_i - a_i, \text{ se } i \in J \end{cases}.$$

Podemos estender f_φ a um endomorfismo de E, pois as imagens escolhidas para os geradores anticomutam. Além disso, é fácil ver que f_φ preserva os graus nos geradores, é invertível e que sua inversa $g_\varphi : E_\varphi \longrightarrow E^{(0)} \oplus E^{(1)}$ é dada por

$$g_\varphi(e_i) = \begin{cases} e_i, \text{ se } i \in I \\ e_i + a_i, \text{ se } i \in J \end{cases}.$$

Assim, E_φ é $\mathbb{Z}_2$-isomorfa a uma das superálgebras E_∞, E_{k^*} ou E_k. ■

Exemplo 3.2.8 *Seja $I = I^+ = \{2, 3, 4, \ldots\}$ e defina*

$$\varphi(e_i) = \begin{cases} e_i, \; se \; i \neq 1 \\ -e_1 + 2e_2e_3e_4, \; se \; i = 1 \end{cases}.$$

Veja que

- $E_{0,\varphi} \supset span_F\{e_2, e_3, e_4, \ldots\}$.

- $E_{1,\varphi} \supset span_F\{e_1 - e_2e_3e_4\}$.

Considere E com a $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida pelo método exposto na proposição anterior, isto é, $\|e_1\| = 1$ e $\|e_i\| = 0$ para $i \neq 1$ (temos exatamente a superálgebra E_{1^*}). Então a função $f_\varphi : E \longrightarrow E_\varphi$, dada por

$$f_\varphi(e_i) = \begin{cases} e_i, & se\ i \neq 1 \\ e_1 - e_2e_3e_4, & se\ i = 1 \end{cases},$$

pode ser estendida a um isomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado entre E_{1^*} e E_φ.

Agora defina a função

$$\psi(e_i) = \begin{cases} e_i, & se\ i \neq 1 \\ -e_1 + 2(7e_{13} + 11e_6 + e_2e_3e_4 + \frac{3}{5}e_4e_6e_7e_{17}e_{50}), & se\ i = 1 \end{cases}.$$

Tem-se que ψ induz a superálgebra

- $E_{0,\psi} \supset span_F\{e_2, e_3, e_4, \ldots\}$.

- $E_{1,\psi} \supset span_F\{e_1 - (7e_{13} + 11e_6 + e_2e_3e_4 + \frac{3}{5}e_4e_6e_7e_{17}e_{50})\}$.

Pela proposição anterior, temos que E_φ e E_ψ são $\mathbb{Z}_2$-isomorfas a E_{1^*}. Ou seja, mesmo tirando a homogeneidade de e_1 por parcelas bem mais arbitrárias, a estrutura da superálgebra não se altera.

3.2.2 $\mathbb{Z}_2$-graduações triangulares em E

Nesta seção, vamos apresentar uma maneira bem particular de construir $\mathbb{Z}_2$-graduações em E, que aqui serão chamadas de $\mathbb{Z}_2$-graduações triangulares[1]. Para cada $N \in \mathbb{N}$, construiremos um subgrupo τ_N de ordem 2^N de $Aut(E)$ com a propriedade de que todos os seus elementos induzem superálgebras de Grassmann. Assim, em τ_N, poderemos investigar questões do tipo: se φ, $\psi \in \tau_N$, qual relação há entre E_φ, E_ψ e $E_{\varphi\circ\psi}$?

[1]Nomenclatura inspirada no trabalho [35] de Makar-Limanov.

Aqui denotaremos por $E_{can} = E_{(0)} \oplus E_{(1)}$ a $\mathbb{Z}_2$-graduação natural de E e, sendo $k \in \mathbb{N}$, usamos a notação:

$$E(e_1, \dots, e_k): \text{ subespaço gerado pelos monômios sem fatores em } \{e_1, \dots, e_k\}.$$

Definição 3.2.9 *Seja $n \in \mathbb{N}$. Todo automorfismo $T_n \colon E \longrightarrow E$ definido por*

$$T_n(e_j) = \begin{cases} e_j, & se\ j \neq n \\ -e_j + 2P_j, & se\ j = n, \end{cases}$$

onde $P_n \in E(e_1, \dots, e_n) \cap E_{(1)}$, é chamado de automorfismo triangular de índice n de E.

Observação 3.2.10 *Todo automorfismo triangular*

- *é de ordem 2,*
- *pode ser obtido pelo algoritmo 1,*
- *induz uma superálgebra de Grassmann $\mathbb{Z}_2$-isomorfa a E_{1^*}.*

Fixemos $N \in \mathbb{N}$ e sejam $T_1, \dots, T_N$ automorfismos triangulares definidos de modo que

$$P_j \in E(e_1, \dots, e_N) \cap E_{(1)},$$

para todo $j = 1, \dots, N$. Novamente, os P_j construídos podem se repetir ou não, isso não interfere na construção.

Agora seja τ_N o subgrupo de $Aut(E)$ gerado por $T_1, \dots, T_N$, isto é, $\tau_N = \langle T_1, \dots, T_N \rangle$.

Proposição 3.2.11 *Seja τ_N um subgrupo de $Aut(E)$ construído pelo método anterior. Então, valem:*

1. *τ_N é um grupo abeliano.*
2. *τ_N é finito e tem ordem 2^N.*
3. *Todo elemento de τ_N induz uma superálgebra de Grassmann.*
4. *Se $\varphi \in \tau_N$ e $\varphi = T_{j_1} \circ \cdots \circ T_{j_s}$, com $j_i \neq j_l$, para $i \neq l$, então E_φ é $\mathbb{Z}_2$-isomorfa a E_{s^*}.*

Demonstração: Provemos o item 1. Sejam u, $v \in \{1, \ldots, N\}$, com $u < v$. Se $j \neq u$, v, claramente

$$T_u \circ T_v(e_j) = T_v \circ T_u(e_j) = e_j.$$

Além disso,

$$T_u \circ T_v(e_u) = T_u(e_u) = -e_u + 2P_u \text{ e}$$

$$T_v \circ T_u(e_u) = T_v(-e_u + 2P_u) = -e_u + 2P_u,$$

donde $T_u \circ T_v(e_u) = T_v \circ T_u(e_u)$. Da mesma forma, temos $T_u \circ T_v(e_v) = T_v \circ T_u(e_v)$, provando que τ_N é abeliano. Deste fato, segue a validade dos itens 1 e 2.

Como τ_N é abeliano e todo gerador é de ordem 2, o item 3 segue diretamente. Para provar o item 4, usa-se a mesma ideia usada na Proposição 3.2.7. ∎

3.3 Automorfismos do tipo 3

Por ora, vamos concentrar nossa atenção em automorfismos do tipo 3. Iremos dar a forma geral deles, tendo por intenção entender melhor a superálgebra de Grassmann induzida.

Usando a mesma ideia da Proposição 3.2.1, apresentamos o seguinte resultado.

Proposição 3.3.1 *Seja $\varphi \in Aut(E)$ tal que $\varphi^2 = 1$. Suponhamos ainda que φ seja um automorfismo do tipo 3, isto é, $I_\beta = \{1, \ldots, k\}$, onde $k \geq 1$. Então ocorre uma das possibilidades abaixo:*

- *φ é do tipo canônico ou*
- *φ é descrito por*

$$\varphi(e_n) = \begin{cases} \pm e_n, \ \ se\ 1 \leq n \leq k \\ -e_n + 2e_1 \cdots e_k V_n + 2W_n, \ \ se\ n > k \end{cases},$$

onde $\{V_n\}_{n>k}$ contém elementos não nulos e estes têm a mesma paridade que k, cada V_n não tem parcelas com fatores em $e_1, \ldots, e_k$ e, ainda, cada W_n é soma de monômios de tamanho ímpar. Além disso, vale a seguinte relação:

$$e_1 \cdots e_k(V_p e_r + V_r e_p) = 2e_1 \cdots e_k(V_p W_r + V_r W_p), \quad r, p > k. \tag{3.1}$$

Demonstração: Pelos argumentos já usados, podemos escrever

$$\varphi(e_n) = -e_n + 2a_n,$$

para $n > k$, onde cada a_n é estável por φ. Novamente, vamos escrever $a_n = a_n^e + a_n^o$, onde a_n^e e a_n^o são a parte par e ímpar de a_n, respectivamente.

Para cada $t \in \{1, \ldots, k\}$ e $n > k$, temos

$$e_t e_n + e_n e_t = 0, \quad \text{logo} \quad \varphi(e_t)\varphi(e_n) + \varphi(e_n)\varphi(e_t) = 0 \quad \text{e} \quad e_t a_n^e = 0.$$

Portanto, $a_n^e = 0$ ou a_n^e tem e_t como fator, para cada $t \in \{1, \ldots, k\}$. Em todo caso, segue que

$$a_n^e = e_1 \cdots e_k V_n,$$

onde cada V_n é nulo ou é soma de monômios que não têm fatores em $e_1, \ldots, e_k$ e são todos de tamanho ímpar ou par, conforme a paridade de k.

Sendo $n > k$ e definindo $W_n = a_n^o$, decorre que

$$\varphi(e_n) = -e_n + 2e_1 \cdots e_k V_n + 2W_n,$$

onde cada W_n é soma de monômios de tamanho ímpar e todos os monômios em V_n têm a mesma paridade que k. Tomando $p, r > k$, temos que:

$$\varphi(e_p)\varphi(e_r) + \varphi(e_r)\varphi(e_p) = 0,$$

e então

$$\begin{aligned}
&(-e_p + 2e_1 \cdots e_k V_p + 2W_p)(-e_r + 2e_1 \cdots e_k V_r + 2W_r) \\
&+(-e_r + 2e_1 \cdots e_k V_r + 2W_r)(-e_p + 2e_1 \cdots e_k V_p + 2W_p) = 0.
\end{aligned}$$

Assim,

$$-2e_p e_1 \cdots e_k V_r - 2e_1 \cdots e_k V_p e_r + 4e_1 \cdots e_k V_p W_r + 4W_p e_1 \cdots e_k V_r$$

$$-2e_r e_1 \ldots e_k V_p - 2e_1 \cdots e_k V_r e_p + 4e_1 \cdots e_k V_r W_p + 4W_r e_1 \cdots e_k V_p = 0,$$

e tem-se

$$-4e_pe_1\cdots e_kV_r - 4e_re_1\cdots e_kV_p + 8e_1\cdots e_kV_pW_r + 8e_1\cdots e_kV_rW_p = 0.$$

Obtemos assim a seguinte relação:

$$e_1\cdots e_k(V_pe_r + V_re_p) = 2e_1\cdots e_k(V_pW_r + V_rW_p), \quad p, r > k.$$

Vamos analisar a relação acima por casos.

Primeira possibilidade: se $V_n = 0$, para todo $n > k$, então φ é do tipo canônico.

Segunda possibilidade: caso contrário, temos que φ é descrito por

$$\varphi(e_n) = \begin{cases} \pm e_n, \text{ se } 1 \leq n \leq k \\ -e_n + 2e_1\cdots e_kV_n + 2W_n, \text{ se } n > k \end{cases},$$

onde $\{V_n\}_{n>k}$ é formado por elementos que têm a mesma paridade que k e $\{W_n\}_{n>k}$ é formado por elementos que são somas de monômios de tamanho ímpar. Além disso, vale a seguinte relação:

$$e_1\cdots e_k(V_pe_r + V_re_p) = 2e_1\cdots e_k(V_pW_r + V_rW_p).$$

Isto encerra a demonstração. ■

A Proposição 3.3.1 nos dá uma direção de como construir superálgebras do tipo 3. Na próxima subseção, mostraremos um método para construir estruturas desse tipo.

3.3.1 Algoritmo para $\mathbb{Z}_2$-graduações do tipo 3

Nesse momento, vamos exibir um algoritmo a partir do qual obtemos automorfismos de E do tipo 3. Eles não serão, necessariamente, do tipo canônico.

Sendo t um número ímpar e $k = 0, 1, 2, \ldots$, fixe $I = \{1, \ldots, k, k+1, \ldots, k+t\} \subset \mathbb{N}$. Para cada $i \in I$, defina a função $\varphi(e_i) = \pm e_i$ de modo que $I^+ = \{1, \ldots, k\}$ (se $k = 0$, teremos $I^+ = \emptyset$) e $I^- = \{k+1, \ldots, k+t\}$. Enquanto que, para $n > k+t$, ponha

$$\varphi(e_n) = -e_n + 2e_1\cdots e_ke_{k+1}\cdots e_{k+t}e_n.$$

Dessa forma, temos a seguinte função definida nos geradores de E:

$$\varphi(e_n) = \begin{cases} e_n, \text{ se } 1 \leq n \leq k \\ -e_n, \text{ se } k+1 \leq n \leq k+t \\ -e_n + 2e_1 \cdots e_k e_{k+1} \cdots e_{k+t} e_n, \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

Veja que

- φ preserva a relação $e_i e_j + e_j e_i = 0$ e, assim, pode ser estendida a um endomorfismo de E.
- Para $n > k+t$

$$\varphi^2(e_n) = \varphi(-e_n + 2e_1 \cdots e_k e_{k+1} \cdots e_{k+t} e_n) = -(-e_n + 2e_1 \cdots e_k e_{k+1} \cdots e_{k+t} e_n)$$

$$+2e_1 \cdots e_k (-1)^t e_{k+1} \cdots e_{k+t}(-e_n + 2e_1 \cdots e_k e_{k+1} \cdots e_{k+t} e_n).$$

  Logo $\varphi^2(e_n) = e_n$.

Portanto, φ é um automorfismo de ordem 2. A superálgebra induzida, $E_\varphi = E_{0,\varphi} \oplus E_{1,\varphi}$, tem componentes descritas por

- $E_{0,\varphi} \supset span_F\{e_1, \ldots, e_k, e_1 \cdots e_k e_{k+1} \cdots e_{k+t} e_n \mid n > k+t\}$ e
- $E_{1,\varphi} \supset span_F\{e_{k+1}, \ldots, e_{k+t}, (e_n - e_1 \cdots e_k e_{k+1} \cdots e_{k+t} e_n) \mid n > k+t\}$.

Novamente, a descrição precisa de cada componente homogênea é feita como na Observação 3.2.3. Chamaremos o algoritmo acima de **algoritmo 2**. Quando k é um número par, tem-se que φ não é do tipo canônico. Será que, mesmo nessa situação, as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de E_φ são de algum dos tipos homogêneos? A próxima proposição responderá essa pergunta.

Proposição 3.3.2 *Seja E_φ uma $\mathbb{Z}_2$-graduação obtida pelo algoritmo 2. Então as superálgebras E_φ e E_k são $\mathbb{Z}_2$-isomorfas.*

Demonstração: Definamos a função $f_\varphi : E_k \longrightarrow E_\varphi$, dada por

$$f_\varphi(e_n) = \begin{cases} e_n, \text{ se } 1 \leq n \leq k+t \\ e_n - e_1 \cdots e_k e_{k+1} \cdots e_{k+t} e_n, \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

É fácil ver que f_φ preserva a relação $e_ie_j + e_je_i = 0$ e, assim, podemos estender f_φ a um endomorfismo da álgebra E. Além disso, para $n > k+t$, temos

$$f_\varphi(e_1 \cdots e_k e_{k+1} \cdots e_{k+t} e_n) = e_1 \cdots e_k e_{k+1} \cdots e_{k+t} f_\varphi(e_n) =$$

$$= e_1 \cdots e_k e_{k+1} \cdots e_{k+t}(e_n - e_1 \cdots e_k e_{k+1} \cdots e_{k+t} e_n) =$$

$$= e_1 \cdots e_k e_{k+1} \cdots e_{k+t} e_n.$$

Diante disso, consideremos $g_\varphi : E_\varphi \longrightarrow E_k$, dada por

$$g_\varphi(e_n) = \begin{cases} e_n, \text{ se } 1 \leq n \leq k+t \\ e_n + e_1 \cdots e_k e_{k+1} \cdots e_{k+t} e_n, \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

Pelo mesmo motivo exposto anteriormente, temos

$$g_\varphi(e_1 \cdots e_k e_{k+1} \cdots e_{k+t} e_n) = e_1 \cdots e_k e_{k+1} \cdots e_{k+t} e_n.$$

Assim, para $n > k+t$, concluímos que

$$f_\varphi \circ g_\varphi(e_n) = f_\varphi(e_n + e_1 \cdots e_k e_{k+1} \cdots e_{k+t} e_n) =$$

$$= (e_n - e_1 \cdots e_k e_{k+1} \cdots e_{k+t} e_n) + e_1 \cdots e_k e_{k+1} \cdots e_{k+t} e_n = e_n.$$

Da mesma forma, concluímos que $g_\varphi \circ f_\varphi(e_n) = e_n$, provando que f_φ é um automorfismo de E. Pela construção feita, tem-se que f_φ é $\mathbb{Z}_2$-graduado e, assim, as superálgebras E_φ e E_k são $\mathbb{Z}_2$-isomorfas. ■

Observação 3.3.3 *Seja $\varphi : E \longrightarrow E$ definida por:*

$$\varphi(e_n) = \begin{cases} -e_1, \ \textit{se } n = 1 \\ -e_n + 2e_1e_n, \ \textit{se } n > 1 \end{cases}.$$

Considere $E_\varphi = E_{0,\varphi} \oplus E_{1,\varphi}$ a superálgebra induzida. Suas componentes homogêneas são

1. *$E_{1,\varphi} \supset span_F\{e_1, (e_n - e_1e_n) \mid n > 1\}$.*

2. *$E_{0,\varphi} = Z(E)$.*

Observe que o automorfismo φ é um caso particular do algoritmo 2, quando fixamos $k = 0$ e $t = 1$. Veja que apenas o gerador e_1 é homogêneo nessa graduação e, além disso, o automorfismo φ não é do tipo canônico. Não obstante, pela proposição anterior, tem-se que E_φ é equivalente à $\mathbb{Z}_2$-graduação natural E_{can}.

3.4 Automorfismos do tipo 4 existem?

Nesta seção, consideraremos automorfismos do tipo 4. Mostraremos que, em uma classe ampla de situações, automorfismos desse tipo (e portanto $\mathbb{Z}_2$-graduações) não existem. Conjecturamos que, de forma geral, esta quarta estrutura não existe.

O próximo teorema nos diz que não é possível definir automorfismos do tipo 4 via translação monomial.

Teorema 3.4.1 *Não existe automorfismo do tipo 4 dado por*

$$\varphi(e_n) = -e_n + 2a_n,$$

onde, para cada n, a_n é um monômio (ou múltiplo escalar de monômio) na álgebra de Grassmann.

Demonstração: Suponha que para todo n, tenhamos

$$\varphi(e_n) = -e_n + 2a_n,$$

onde a_n é monômio ou múltiplo escalar de monômio. Para simplificar a notação, suponhamos que $a_n = e_{n_1} \cdots e_{n_{k_n}} \neq 0$ é um monômio, com $\varphi(a_n) = a_n$.

Como φ é do tipo 4, segue que a_n tem tamanho $k_n = |a_n| > 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$e_{n_1} \cdots e_{n_{k_n}} = \varphi(a_n) = (-e_{n_1} + 2a_{n_1}) \cdots (-e_{n_{k_n}} + 2a_{n_{k_n}}).$$

Logo,

$$e_{n_1} \cdots e_{n_{k_n}} = (-1)^{k_n} e_{n_1} \cdots e_{n_{k_n}} + \sum_{|m_n| > k_n} m_n.$$

Segue que k_n é um número par e, assim, $a_n \in Z(E)$.

Por outro lado, como $(-e_n+2a_n)^2 = 0$, concluímos que e_n é fator de a_n. Reorganizando os índices e abusando da notação, podemos escrever

$$\varphi(e_n) = -e_n + 2e_n e_{n_1} \cdots e_{n_{k_n}},$$

onde k_n é ímpar. Observe que estamos supondo que e_n ocorre na primeira posição do respectivo monômio. Caso e_n esteja em outra posição, o monômio poderia ficar multiplicado por -1. Isso não prejudicaria o argumento que usaremos.

Decorre que

$$\varphi(e_n)\varphi(e_m) = (-e_n + 2e_n e_{n_1} \cdots e_{n_{k_n}})(-e_m + 2e_m e_{m_1} \cdots e_{m_{k_m}}) =$$

$$= e_n e_m - 2e_n e_m e_{m_1} \cdots e_{m_{k_m}} - 2e_n e_{n_1} \cdots e_{n_{k_n}} e_m + 4e_n e_{n_1} \cdots e_{n_{k_n}} e_m e_{m_1} \cdots e_{m_{k_m}}$$

e

$$\varphi(e_m)\varphi(e_n) = (-e_m + 2e_m e_{m_1} \cdots e_{m_{k_m}})(-e_n + 2e_n e_{n_1} \cdots e_{n_{k_n}}) =$$

$$= e_m e_n - 2e_m e_n e_{n_1} \cdots e_{n_{k_n}} - 2e_m e_{m_1} \cdots e_{m_{k_m}} e_n + 4e_m e_{m_1} \cdots e_{m_{k_m}} e_n e_{n_1} \cdots e_{n_{k_n}}.$$

Desta forma, a relação $\varphi(e_n)\varphi(e_m) + \varphi(e_m)\varphi(e_n) = 0$ implica que

$$-2e_n e_m e_{m_1} \cdots e_{m_{k_m}} - 2e_n e_{n_1} \cdots e_{n_{k_n}} e_m + 4e_n e_{n_1} \cdots e_{n_{k_n}} e_m e_{m_1} \cdots e_{m_{k_m}}$$

$$-2e_m e_n e_{n_1} \cdots e_{n_{k_n}} - 2e_m e_{m_1} \cdots e_{m_{k_m}} e_n + 4e_m e_{m_1} \cdots e_{m_{k_m}} e_n e_{n_1} \cdots e_{n_{k_n}} = 0.$$

Daí,

$$-4e_n e_m e_{m_1} \cdots e_{m_{k_m}} - 4e_m e_n e_{n_1} \cdots e_{n_{k_n}} + 8e_m e_{m_1} \cdots e_{m_{k_m}} e_n e_{n_1} \cdots e_{n_{k_n}} = 0.$$

Fixando $m = 1$ e escolhendo $n \notin \{1_1, \ldots, 1_{k_1}\}$, concluímos que

$$e_{n_1} \cdots e_{n_{k_n}} = e_{1_1} \cdots e_{1_{k_1}}.$$

Nesse caso, teremos a descrição $\varphi(e_{1_1}) = -e_{1_1} + 2e_{1_1}P, \ldots, \varphi(e_{1_{k_1}}) = -e_{1_{k_1}} + 2e_{1_{k_1}}Q$ e $\varphi(e_n) = -e_n + 2e_n e_{1_1} \cdots e_{1_{k_1}}$, para $n \notin \{1_1, \ldots, 1_{k_1}\}$ ($P, \ldots, Q$ denotam monômios em E). Agora, fixando $m = 1_1$, e sendo n tal que $e_n \notin supp(P)$, pelo mesmo raciocínio que foi usado no caso $m = 1$, obtemos

$$e_{n_1} \cdots e_{n_{k_n}} = P.$$

Assim, escolhendo n tal que $n \notin \{1_1, \ldots, 1_{k_1}\}$ e $e_n \notin supp(P)$, temos que $e_{n_1} \cdots e_{n_{k_n}}$ realiza duas igualdades simultâneas, quais sejam:

$$P = e_{n_1} \cdots e_{n_{k_n}} = e_{1_1} \cdots e_{1_{k_1}}.$$

Logo $\varphi(e_{1_1}) = -e_{1_1} + 2e_{1_1}P = -e_{1_1} + 2e_{1_1}(e_{1_1} \cdots e_{1_{k_1}}) = -e_{1_1}$, o que é uma contradição. Portanto, não existe automorfismo nas condições apresentadas. ■

Uma outra tentativa de definir algum automorfismo do tipo 4 seria via translações constantes, ou seja, automorfismos da forma $\varphi(e_n) = -e_n + 2P$, onde $P \in E$ é fixo e contém alguma parcela de tamanho ≥ 2. No entanto, novamente, isso não é possível, de acordo com a proposição seguinte.

Proposição 3.4.2 *Seja φ um automorfismo do tipo 4 dado por*

$$\varphi(e_n) = -e_n + 2a_n.$$

Então, o conjunto de translações $T = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é linearmente independente.

Demonstração: Sejam $k \in \mathbb{N}$, $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k} \in T$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F$ tais que

$$\lambda_1 a_{i_1} + \cdots + \lambda_k a_{i_k} = 0.$$

Por conseguinte,

$$\varphi(\lambda_1 e_{i_1} + \cdots + \lambda_k e_{i_k}) = \lambda_1(-e_{i_1} + 2a_{i_1}) + \cdots + \lambda_k(-e_{i_k} + 2a_{i_k})$$

$$= -(\lambda_1 e_{i_1} + \cdots + \lambda_k e_{i_k}) + 2(\lambda_1 a_{i_1} + \cdots + \lambda_k a_{i_k}).$$

Portanto, temos que

$$\varphi(\lambda_1 e_{i_1} + \cdots + \lambda_k e_{i_k}) = -(\lambda_1 e_{i_1} + \cdots + \lambda_k e_{i_k}).$$

Se a combinação $\lambda_1 e_{i_1} + \cdots + \lambda_k e_{i_k}$ for não nula, tomamos uma base γ do espaço linear

L contendo o vetor $\lambda_1 e_{i_1} + \cdots + \lambda_k e_{i_k}$, obtendo uma contradição pois φ é do tipo 4.

Portanto, $\lambda_1 e_{i_1} + \cdots + \lambda_k e_{i_k} = 0$, donde $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$. Logo, o conjunto T é linearmente independente. ■

Corolário 3.4.3 *Não existe automorfismo do tipo 4 definido por*

$$\varphi(e_n) = -e_n + P,$$

onde $P \in E$ é constante e contém monômios em E de tamanho ≥ 2.

Demonstração: Segue diretamente da proposição anterior. ■

Teorema 3.4.4 *Seja φ um automorfismo do tipo 4. Então a linearização φ_l não é o automorfismo identidade.*

Demonstração: Supondo que φ seja do tipo 4 e que φ_l seja a identidade, podemos escrever

$$\varphi(e_n) = e_n + b_n,$$

onde b_n é soma de monômios de tamanho ≥ 2 e $\varphi(b_n) = -b_n$. Digamos que $b_n = \lambda_{n_1} \tilde{b_{n_1}} + \cdots + \lambda_{n_{k(n)}} \tilde{b_{n_{k(n)}}}$ e seja $s = \min\{|\tilde{b_{n_v}}| \mid n \in \mathbb{N}, v = 1, \ldots, k(n)\}$.

Agora fixe um índice j tal que

$$\varphi(e_j) = e_j + \beta e_{j_1} \cdots e_{j_s} + \sum_{b_m \in C} \beta_{jm} b_m,$$

onde $C = \{\tilde{b_{n_v}} \mid \tilde{b_{n_v}} \neq e_{j_1} \cdots e_{j_s}\}$ e $\beta \neq 0$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned} e_j = \varphi^2(e_j) &= \varphi(e_j + \beta e_{j_1} \cdots e_{j_s} + \sum_{b_m \in C} \beta_{jm} b_m) \\ &= e_j + \beta e_{j_1} \cdots e_{j_s} + \sum_{b_m \in C} \beta_{jm} b_m \\ &+ \beta \varphi(e_{j_1}) \cdots \varphi(e_{j_s}) + \sum_{b_m \in C} \beta_{jm} \varphi(b_m). \end{aligned}$$

Pela forma como φ age sobre cada elemento e_n, segue que

$$\varphi(e_{j_1}) \cdots \varphi(e_{j_s}) = e_{j_1} \cdots e_{j_s} + \sum \theta_n d_n,$$

onde cada d_n que aparece no somatório é diferente de $e_{j_1} \cdots e_{j_s}$. Logo,

$$e_j = \varphi^2(e_j) = e_j + 2\beta e_{j_1} \cdots e_{j_s} + \sum \tilde{\theta}_n d_n,$$

e obtemos $\beta = 0$, o que é uma contradição. Portanto, φ_l não é o automorfismo identidade, o que finaliza a demonstração. ■

Os resultados anteriores nos dizem que a quarta estrutura de superálgebra de Grassmann não existe em uma classe ampla de situações. Não conseguimos uma prova geral da inexistência de $\mathbb{Z}_2$-graduações do tipo 4, mas formulamos a seguinte conjectura:

Conjectura 3.4.5 *Seja $E = \varepsilon_0 \oplus \varepsilon_1$ uma $\mathbb{Z}_2$-graduação arbitrária na álgebra de Grassmann E. Então existe alguma base linear de L que contém, no mínimo, um gerador homogêneo na $\mathbb{Z}_2$-graduação.*

Exemplo 3.4.6 *Fixe uma base $\beta = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ do espaço vetorial L. Definamos o automorfismo φ sobre β como segue*

- $\varphi(e_{2i-1}) = e_{2i}$, *e*

- $\varphi(e_{2i}) = e_{2i-1}$,

para todo $i \in \mathbb{N}$.

Note que não existem elementos de β estáveis (ou com sinal trocado) por φ. Contudo, é fácil escolher outra base de L que contém elementos invariantes. Por exemplo, em vez de e_1 e e_2 em β se pode tomar $e_1 + e_2$ e $e_1 - e_2$, deixando os demais elementos de β. É a esse tipo de propriedade que a Conjectura 3.4.5 se refere.

Exemplo 3.4.7 *Consideremos um espaço vetorial L de dimensão 2, com base ordenada $\beta = \{e_1, e_2\}$, e seja $B = \{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$ a base ordenada de Λ_2 associada. A partir disso, definamos a função*

$$\varphi(1) = 1,$$

$$\varphi(e_1) = -e_1 + 2e_1e_2,$$

$$\varphi(e_2) = -e_2 + 2e_1e_2.$$

Além disso, definindo $\varphi(e_1e_2) = \varphi(e_1)\varphi(e_2)$, *obtemos*

$$\varphi(e_1e_2) = e_1e_2.$$

Portanto,

$$M = [\varphi]_B^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observe que M *é uma matriz invertível e* $M^2 = Id$ *é a matriz identidade. Assim,* φ *é um automorfismo do espaço vetorial* Λ_2*. Além disso, pela definição de* φ*, vemos que* φ *é um automorfismo de ordem 2 da álgebra* Λ_2*.*

Sendo $v_1 = e_1 - e_2$*, observe que* $\varphi(v_1) = -v_1$*. Decorre que é possível mudar a base de* L *de modo que o gerador* v_1 *seja homogêneo. Novamente esse exemplo ilustra a Conjectura 3.4.5.*

3.5 O problema em dimensão finita: $\mathbb{Z}_2$-graduações em Λ_2

Nesta seção vamos abordar a questão da classificação das superálgebras de Grassmann em dimensão finita (dimensão 4). Ressaltamos que as técnicas aqui adotadas não se revelam eficientes em dimensões maiores. Em dimensões maiores, precisamos resolver sistemas não lineares de equações com muitas variáveis e isso dificulta a abordagem feita aqui.

Sendo L um F-espaço vetorial de dimensão n, denotamos por Λ_n a álgebra de Grassmann (unitária) de L. Ao longo de toda a seção, o corpo F será considerado de característica zero. Precisaremos dessa suposição sob o corpo pois, em vários momentos, iremos fazer divisões por escalares em F. Por isso, para evitar fazer restrições nos argumentos desenvolvidos, optamos por fixar que o corpo F tem característica zero.

Seja φ um automorfismo de ordem 2 em Λ_2, agindo nos geradores como segue:

- $\varphi(1) = 1$,
- $\varphi(e_1) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_1e_2$,

- $\varphi(e_2) = ae_1 + be_2 + ce_1e_2$.

Observe que

$$\varphi(e_1e_2) = (\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_1e_2)(ae_1 + be_2 + ce_1e_2) = (\alpha b - \beta a)e_1e_2.$$

Logo, o monômio e_1e_2 é autovetor para φ. Em virtude de φ ser de ordem 2, decorre que

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ a & b \end{vmatrix} = (\alpha b - \beta a) = \pm 1.$$

Daqui por diante, faremos o estudo dos automorfismos em casos. Primeiro, consideramos $D = 1$ e seus subcasos e, depois, $D = -1$ e seus subcasos. Ao final, teremos listadas todas as possíveis $\mathbb{Z}_2$-graduações de Λ_2.

<u>O caso $D = 1$</u>: veja que

$$e_1 = \varphi^2(e_1) = \varphi(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_1e_2) = \alpha(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_1e_2) + \beta(ae_1 + be_2 + ce_1e_2) + \gamma e_1e_2$$

$$= (\alpha^2 + \beta a)e_1 + (\alpha\beta + \beta b)e_2 + (\alpha\gamma + \beta c + \gamma)e_1e_2.$$

Obtemos o sistema

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta a = 1 \\ \alpha\beta + \beta b = 0 \\ \alpha\gamma + \beta c + \gamma = 0 \end{cases}.$$

De forma inteiramente análoga, temos que

$$e_2 = \varphi^2(e_2) = \varphi(ae_1 + be_2 + ce_1e_2) = a(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_1e_2) + b(ae_1 + be_2 + ce_1e_2) + ce_1e_2$$

$$= (a\alpha + ba)e_1 + (a\beta + b^2)e_2 + (a\gamma + bc + c)e_1e_2.$$

Assim,

$$\begin{cases} a\alpha + ba = 0 \\ a\beta + b^2 = 1 \\ a\gamma + bc + c = 0 \end{cases}.$$

A equação $\alpha\beta + \beta b = (\alpha + b)\beta = 0$ resulta em duas possibilidades: $\beta = 0$ ou $b = -\alpha$. De início, vamos supor $\beta = 0$. Sendo assim, temos $\alpha^2 = 1$ e $\gamma(1 + \alpha) = 0$. Se $\alpha = 1$, temos

$\gamma = 0$. Caso $\alpha = -1$, a princípio γ pode assumir qualquer valor. Resumindo:

$*$	α	β	γ
L_1	1	0	0
L_2	-1	0	γ

Suponha o caso L_1. Usando os valores de α, β e γ, obtemos $b^2 = 1$, $a(b+1) = 0$ e $c(b+1) = 0$.

Se $b = 1$, tem-se que $a = c = 0$. Por outro lado, o caso $b = -1$ não pode ocorrer. Com efeito, temos que

$$1 = D = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{vmatrix}.$$

Daí, a única possibilidade é $b = 1$. Portanto,

$L_1 \hookrightarrow$

a	b	c
0	1	0

Assim, φ seria o automorfismo identidade. Vamos supor agora o caso L_2. Avaliando o valor de D e os valores de L_2, segue que $b = -1$, $a = 0$ e c não apresenta restrições. Portanto,

$L_2 \hookrightarrow$

a	b	c
0	-1	c

Da primeira equação do primeiro sistema e do fato de $D = 1$, podemos ver que o caso $\beta \neq 0$ é impossível. Daqui em diante consideremos o caso em que $D = -1$.

<u>O caso $D = -1$</u>: neste caso, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta a = 1 \\ \alpha\beta + \beta b = 0 \\ \alpha\gamma + \beta c - \gamma = 0 \end{cases}.$$

Para $\beta = 0$, há as seguintes possibilidades:

$*$	α	β	γ
H_1	1	0	γ
H_2	-1	0	0

Por outro lado, também obtemos o sistema

$$\begin{cases} a\alpha + ba = 0 \\ a\beta + b^2 = 1 \\ a\gamma + bc - c = 0 \end{cases}.$$

Suponha H_1. Segue que $b = -1$, o valor a poderia ser qualquer e $c = \dfrac{a\gamma}{2}$.

$$H_1 \hookrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline a & -1 & a\gamma/2 \\ \hline \end{array}.$$

Agora suponha H_2. Neste caso, temos $b = 1$, enquanto a e c não possuem restrições.

$$H_2 \hookrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{a} & \text{b} & \text{c} \\ \hline \text{a} & 1 & \text{c} \\ \hline \end{array}.$$

Agora suponhamos $\beta \neq 0$. Neste caso, não obtemos condições sobre α e γ e teremos

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline 1 - \alpha^2/\beta & -\alpha & \gamma(1-\alpha)/\beta \\ \hline \end{array}.$$

Portanto, conseguimos classificar todos os automorfismos de ordem 2 de Λ_2. Abaixo, vamos representar de forma matricial cada um deles.

A partir dos cálculos acima podemos perceber que o problema de descrever tais automorfismos se torna mais complexo à medida que $\dim L$ cresce. A quantidade de coeficientes aumenta. Adicionalmente, as equações que os relacionam se tornam menos palpáveis.

Temos as seguintes representações matriciais.

Caso $D = 1$:

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \gamma & c & 1 \end{bmatrix}.$$

Caso $D = -1$:

$$\varphi_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \gamma & \frac{a\gamma}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\varphi_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\varphi_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \frac{1-\alpha^2}{\beta} & 0 \\ 0 & \beta & -\alpha & 0 \\ 0 & \gamma & \frac{\gamma(1-\alpha)}{\beta} & -1 \end{bmatrix},$$

para $\beta \neq 0$. Observe que os automorfismos φ_1 e φ_4 admitem geradores do espaço base L como autovetores. Uma pergunta que surge naturalmente é a seguinte: para os demais automorfismos, é possível mudar a base do espaço L de modo que, nessa nova base, algum gerador seja autovetor? Vamos estudar isto abaixo.

3.5.1 O automorfismo φ_2

Nesta subseção vamos considerar automorfismos do tipo φ_2, isto é,

$$\varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \gamma & c & 1 \end{bmatrix}.$$

Veja que se γ ou c é zero, claramente o automorfismo φ_2 preserva vetores de L. Suponhamos então que $\gamma \neq 0$ e $c \neq 0$.

Sejam x e y escalares e considere o vetor $xe_1 + ye_2$ em L. A fim de que $xe_1 + ye_2$ seja autovetor de φ_2 é preciso que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \gamma & c & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e assim} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -x \\ -y \\ \gamma x + cy \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, devemos apenas considerar o caso do sinal “$-$” (menos) no lado direito da igualdade precedente. Neste caso, segue que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -x \\ -y \\ \gamma x + cy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo $\gamma x + cy = 0$, donde $y = \dfrac{-\gamma x}{c}$. Portanto, tomando $x = 1$, o vetor $\tilde{e_1} = e_1 + \dfrac{-\gamma}{c} e_2$ é tal que $\varphi_2(\tilde{e_1}) = -\tilde{e_1}$. Assim, $\varphi_2(e_2) = -e_2 + ce_1e_2 = -e_2 + c(\tilde{e_1} + \dfrac{\gamma}{c} e_2)e_2 = -e_2 + c\tilde{e_1}e_2$.

Pelos cálculos anteriores concluímos que automorfismos do tipo φ_2, via mudança de base, podem ser considerados da forma:

- $\varphi(1) = 1$,
- $\varphi(\tilde{e_1}) = -\tilde{e_1}$,
- $\varphi(e_2) = -e_2 + c\tilde{e_1}e_2$.

3.5.2 O automorfismo φ_3

Consideremos agora automorfismos do tipo φ_3, isto é,

$$\varphi_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \gamma & \frac{a\gamma}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Veja que se γ ou a é zero, claramente o automorfismo φ_3 preserva vetores de L. Suponhamos então que $\gamma \neq 0$ e $a \neq 0$.

Sejam x e y escalares e considere o vetor $xe_1 + ye_2$ em L. Para que $xe_1 + ye_2$ seja autovetor de φ_3 é preciso que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \gamma & \frac{a\gamma}{2} & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e assim} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ x + ay \\ -y \\ \gamma x + \frac{a\gamma}{2} y \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Novamente, só precisamos considerar o caso "$-$" (sinal de menos) no lado direito da igualdade. Neste caso,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x + ay \\ -y \\ \gamma x + \frac{a\gamma}{2} y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Desta forma obtemos $2x + ay = 0$ e, assim, $y = \dfrac{-2x}{a}$. Portanto, tomando $x = 1$, o vetor $\tilde{e_1} = e_1 + \dfrac{-2}{a} e_2$ é tal que $\varphi_3(\tilde{e_1}) = -\tilde{e_1}$. Consequentemente, $\varphi_3(e_2) = a\tilde{e_1} + e_2 + \dfrac{\gamma a}{2} \tilde{e_1} e_2$.

Pelos cálculos anteriores, concluímos que automorfismos do tipo φ_3, via mudança de base, podem ser considerados da forma:

- $\varphi(1) = 1$,
- $\varphi(\tilde{e_1}) = -\tilde{e_1}$,
- $\varphi(e_2) = a\tilde{e_1} + e_2 + \dfrac{\gamma a}{2} \tilde{e_1} e_2$.

3.5.3 O automorfismo φ_5

Por fim, vamos considerar automorfismos do tipo φ_5, isto é,

$$\varphi_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \frac{1-\alpha^2}{\beta} & 0 \\ 0 & \beta & -\alpha & 0 \\ 0 & \gamma & \frac{\gamma(1-\alpha)}{\beta} & -1 \end{bmatrix}.$$

Observe que $\alpha = 1$ implica que φ_5 preserva ao menos um gerador. Vamos supor, então, que $\alpha \neq 1$.

Seguindo a mesma ideia, vemos que o vetor $\tilde{e_1} = e_1 + \dfrac{\beta}{(\alpha-1)} e_2$ satisfaz $\varphi_5(\tilde{e_1}) = -\tilde{e_1}$ e $\varphi_5(e_2) = \dfrac{(1-\alpha^2)}{\beta}\tilde{e_1} + e_2 + \dfrac{\gamma(1-\alpha)}{\beta}\tilde{e_1}e_2$.

Portanto, os automorfismos do tipo φ_5 podem ser considerados da seguinte forma:

- $\varphi(1) = 1$,
- $\varphi(\tilde{e_1}) = -\tilde{e_1}$,
- $\varphi(e_2) = \dfrac{(1-\alpha^2)}{\beta}\tilde{e_1} + e_2 + \dfrac{\gamma(1-\alpha)}{\beta}\tilde{e_1}e_2$.

Com base nas observações anteriores, podemos enunciar a seguinte classificação em dimensão 4:

Teorema 3.5.1 *Em toda superálgebra de Grassmann Λ_2 de dimensão 4 existe algum elemento homogêneo que pertence ao espaço base L. Ademais, todo automorfismo de ordem no máximo 2 de Λ_2, a menos de mudança de base, pertence à lista abaixo:*

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{bmatrix} \ \mathit{ou}\ \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\varphi_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma a/2 & -1 \end{bmatrix} \quad ou\ \varphi_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\varphi_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c & -1 \end{bmatrix},$$

$$\varphi_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & (1-\alpha^2)/\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(1-\alpha)/\beta & -1 \end{bmatrix} \quad ou\ \varphi_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -1 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & -1 \end{bmatrix}, \beta \neq 0.$$

Ressaltamos que a lista de automorfismos anterior pode apresentar redundância, isto é, algumas das matrizes anteriores podem representar o mesmo automorfismo. Para evitar maiores cálculos, vamos deixá-la da forma como está, com alguma possível redundância. Observe que fazer os mesmos cálculos para Λ_3 se torna algo bem mais trabalhoso e, nesse caso, uma abordagem computacional seria mais indicada.

3.6 Recaptulando

Nesta seção, resumimos os fatos obtidos para as $\mathbb{Z}_2$-graduações da álgebra de Grassmann de dimensão infinita. As tabelas abaixo fazem uma síntese do que foi obtido:

φ do tipo	2 (é necessariamente do tipo canônico)
S_1	$T_2(E_\varphi) = T_2(E_\infty)$
S_2	$T_2(E_\varphi)$ coincide com o caso homogêneo (com uma hipótese adicional)
S_3	$T_2(E_\varphi) \subset T_2(E_{k^*})$
S_4	$T_2(E_\varphi)$ coincide com o caso homogêneo (com uma hipótese adicional)
S_5	$T_2(E_\varphi) \subset T_2(E_k)$
Algoritmo 1	E_φ é $\mathbb{Z}_2$-isomorfa ao caso homogêneo
Grupo τ_N	$E_\varphi \cong_{\mathbb{Z}_2} E_{s^*}, \forall \varphi \in \tau_N$

φ do tipo	3 (não necessariamente do tipo canônico)
Algoritmo 2	E_φ é $\mathbb{Z}_2$-isomorfa ao caso homogêneo

φ do tipo	4
Por translação monomial	não existe automorfismo φ
Por translação constante	não existe automorfismo φ
Linearização é a identidade	não existe automorfismo φ
Conjectura	Em toda $\mathbb{Z}_2$-graduação em E, há algum gerador homogêneo

Capítulo 4

Identidades $\mathbb{Z}$-Graduadas da Álgebra de Grassmann

Neste capítulo da tese, estudaremos graduações da álgebra de Grassmann pelo grupo cíclico infinito $\mathbb{Z}$ e descreveremos as respectivas identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas. Inicialmente, consideraremos o corpo base de característica zero e, em seguida, obteremos resultados no caso de o corpo base ser infinito de característica $p > 2$. Lembramos que a única $\mathbb{Z}$-graduação conhecida em E é a sua $\mathbb{Z}$-graduação natural, aqui denotada por E^{can}. É relativamente fácil ver que a superálgebra E_{can} pode ser obtida de E^{can} pela graduação quociente módulo $2\mathbb{Z}$. Como veremos, tal propriedade também é satisfeita para as $\mathbb{Z}_2$-graduações E_∞, E_k e E_{k^*}, ou seja, iremos construir três tipos de $\mathbb{Z}$-graduações em E, denotadas por E^∞, E^k e E^{k^*}, que se relacionam com E_∞, E_k e E_{k^*} via a graduação quociente induzida módulo $2\mathbb{Z}$. Após isso, determinaremos o $T_\mathbb{Z}$-ideal de identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas para as estruturas E^{k^*} e E^∞. Primeiro, faremos isso sobre corpos de característica zero e, em seguida, sobre corpos infinitos de característica $p > 2$. De forma mais geral, exibiremos um método que permite construir $\mathbb{Z}$-graduações em E de maneira bastante natural. Partindo de um par de listas $(n_1, \ldots, n_l)$ e $(v_1, \ldots, v_l)$, onde $(n_1, \ldots, n_l) \in \mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0$ (estamos usando a notação $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$) e $v_j \in \mathbb{N}$ ou $v_j = \infty$ para $j = 1, \ldots, l$, dotaremos E de uma estrutura de $\mathbb{Z}$-graduação. Descreveremos as identidades para algumas dessas estruturas. Cabe ressaltar que, em termos estruturais, as graduações E^∞ e E^{k^*} são bem distintas, visto que $Sup(E^{k^*}) = \{0, 1, \ldots, k\}$ é finito e $Sup(E^\infty) = \{0, 1, 2, \ldots\}$ é infinito. Também construiremos graduações em E com suporte da forma $\{0, r, 2r, 3r, \ldots\}$, com $r \in \mathbb{N}$, e também com suporte sendo todo o grupo $\mathbb{Z}$. Na literatura, não há trabalhos abordando as graduações de E, com as respectivas identidades graduadas, quando o grupo que realiza a graduação é infinito. Nosso trabalho é o primeiro nessa linha.

Sobre graduações pelo grupo cíclico infinito, cabe dizer que em [45, 46] Vasilovsky investigou as $\mathbb{Z}_n$-graduações e também as $\mathbb{Z}$-graduações da álgebra $M_n(F)$ e constatou que as identidades graduadas são, essencialmente, as mesmas. No caso da álgebra de Grassmann, veremos que as identidades graduadas não coincidem, embora alguma semelhança seja notada.

Aqui recordamos que nos trabalhos de Vasilovsky [45, 46] assume-se que o corpo F é de característica 0. Alguns anos mais tarde, Azevedo [4, 5] mostrou que as identidades de $M_n(F)$, graduada por $\mathbb{Z}_n$ bem como por $\mathbb{Z}$, são as mesmas se o corpo é infinito e de característica positiva. Pouco se sabe sobre as graduações e as identidades graduadas em álgebras quando o grupo é infinito, mesmo quando $G = \mathbb{Z}$. Graduações com $\mathbb{Z}$ aparecem de forma natural, quando o suporte da graduação é finito, especialmente quando ele é "pequeno": por exemplo $\{-1, 0, 1\}$ ou $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Tais graduações são importantes na construção de Tits, Kantor e Koecher que relaciona álgebras de Lie e álgebras de Jordan. (Ressaltamos que qualquer álgebra de Lie simples de dimensão finita, sobre corpo algebricamente fechado de característica 0 pode ser graduada com a graduação $\{-1, 0, 1\}$ de forma natural: as partes -1 e 1 correspondem às raízes negativas e positivas, e a parte 0: a uma subálgebra de Cartan.) As identidades graduadas da álgebra de Lie simples $sl_2(F)$ com tal graduação foram descritas em [31]. Outras álgebras de Lie também admitem graduações naturais com o grupo $\mathbb{Z}$. Em [18], as identidade $\mathbb{Z}$-graduadas da álgebra de Cartan W_1 dos campos vetoriais sobre a reta foram descritas. Além dos resultados citados acima, pouco se sabe sobre graduações com $\mathbb{Z}$ e sobre as respectivas identidades graduadas.

4.1 A álgebra de Grassmann e sua $\mathbb{Z}$-graduação natural

Seja E a álgebra de Grassmann de um espaço vetorial de dimensão infinita L com geradores $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ e sobre um corpo F de característica zero. Assumimos que os elementos e_i formam uma base de L. Denotaremos por β_E a sua base usual de monômios em $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$. Apresentamos as seguintes definições.

Definição 4.1.1 *Seja $w = e_{j_1} \cdots e_{j_n} \in \beta_E$ um monômio gerador qualquer de E. Dizemos que*

(i) *O conjunto $supp(w) = \{e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}\}$ é o suporte de w.*

(ii) *O número $n = |supp(w)|$ é o tamanho (ou comprimento) de w.*

Convencionamos, ainda, que a unidade 1 tem tamanho zero.

A álgebra E admite uma $\mathbb{Z}$-graduação natural (ou canônica) $E^{can} = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} E^{(n)}$, onde

$$E^{(n)} = \begin{cases} 0, \text{ se } n < 0 \\ F, \text{ se } n = 0 \\ span_F\{w \in \beta_E \mid |supp(w)| = n\}, \text{ se } n \geq 1 \end{cases}.$$

Observação 4.1.2 *Sendo $F\langle X, \mathbb{Z}\rangle$ a álgebra associativa livre $\mathbb{Z}$-graduada, lembre que $\alpha(x)$ denota o $\mathbb{Z}$-grau da variável x. A notação x^t também é comum para indicar que $\alpha(x) = t$. Faremos uso de ambas as notações e o contexto impedirá ambiguidades. Como de costume, para indicar o grau dos elementos $a \in E$ em alguma graduação, usaremos o símbolo $\|a\|$.*

Abaixo, vamos exibir um conjunto gerador das identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas para o $T_{\mathbb{Z}}$-ideal de $E^{can} = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} E^{(n)}$.

Lema 4.1.3 *Os seguintes polinômios são identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas para $E^{can} = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} E^{(n)}$:*

- *x, se $\alpha(x) < 0$;*
- *$[x_1, x_2]$, se $\alpha(x_1)$ ou $\alpha(x_2)$ é par;*
- *$x_1x_2 + x_2x_1$, se $\alpha(x_1)$ e $\alpha(x_2)$ são ímpares.*

Demonstração: Consiste numa verificação direta. ■

A partir do lema anterior, conseguimos descrever os geradores para o $T_{\mathbb{Z}}$-ideal de identidades de E^{can}, de acordo com a proposição abaixo.

Proposição 4.1.4 *O $T_{\mathbb{Z}}$-ideal de identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas para $E^{can} = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} E^{(n)}$ é gerado pelas identidades do Lema 4.1.3.*

Demonstração: Seja I o $T_{\mathbb{Z}}$-ideal gerado pelas identidades do Lema 4.1.3. Sabemos, pelo lema acima, que $I \subset T_{\mathbb{Z}}(E^{can})$. Vamos mostrar a inclusão oposta.

Considere um polinômio multilinear $f(x_1, \ldots, x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+s}) \notin I$, onde $\alpha(x_i)$ é par, se $i = 1, \ldots, t$, e $\alpha(x_i)$ é ímpar, se $i = t+1, \ldots, t+s$. Claramente, podemos supor que cada variável tem grau homogêneo ≥ 0.

Módulo o ideal I, temos que

$$f \equiv \alpha x_1 \ldots x_t x_{t+1} \ldots x_{t+s} \pmod{I}, \text{ com } \alpha \neq 0.$$

Agora defina a substituição $\mathbb{Z}$-graduada

$$x_1 \longmapsto e_1 \ldots e_{\alpha(x_1)}$$

$$x_2 \longmapsto e_{\alpha(x_1)+1} \ldots e_{\alpha(x_1)+\alpha(x_2)}$$

$$\vdots$$

$$x_t \longmapsto e_{\alpha(x_1)+\cdots+\alpha(x_{t-1})+1} \ldots e_{\alpha(x_1)+\alpha(x_2)+\cdots+\alpha(x_{t-1})+\alpha(x_t)}$$

e, sendo $p = \alpha(x_1) + \alpha(x_2) + \cdots + \alpha(x_t)$, defina

$$x_{t+1} \longmapsto e_{p+1} \ldots e_{p+\alpha(x_{t+1})}$$

$$x_{t+2} \longmapsto e_{p+\alpha(x_{t+1})+1} \ldots e_{p+\alpha(x_{t+1})+\alpha(x_{t+2})}$$

$$\vdots$$

$$x_{t+s} \longmapsto e_{p+\alpha(x_{t+1})+\cdots+\alpha(x_{t+s-1})+1} \ldots e_{p+\alpha(x_{t+1})+\cdots+\alpha(x_{t+s-1})+\alpha(x_{t+s})}.$$

A substituição acima é feita por monômios de suportes disjuntos, logo não anula f. ■

4.2 As $\mathbb{Z}$-graduações E^{k^*}, E^{∞} e E^k

No transcorrer desta seção, iremos construir outras $\mathbb{Z}$-graduações da álgebra de Grassmann. Nelas, assumiremos que os geradores $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ são todos homogêneos.

Essencialmente, nossa abordagem consiste em adaptar a construção feita em [12] para as $\mathbb{Z}_2$-graduações homogêneas de E.

Existem outras maneiras de munir E de uma $\mathbb{Z}$-graduação. Entretanto, por ora, vamos focar nossa atenção no método seguinte. Em seções seguintes apresentaremos um método mais geral para dotar E de uma $\mathbb{Z}$-graduação.

A fim de graduar E com o grupo $\mathbb{Z}$, consideremos as seguintes três possibilidades de atribuição de $\mathbb{Z}$-grau nos geradores:

$$\|e_i\|^k = \begin{cases} 0, & \text{se } i = 1, \ldots, k \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} ,$$

$$\|e_i\|^{k^*} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = 1, \ldots, k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} ,$$

e

$$\|e_i\|^{\infty} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \text{ par} \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Após isto, estendemos o $\mathbb{Z}$-grau a qualquer monômio de E, pondo:

$$\|e_{j_1} \cdots e_{j_n}\| = \|e_{j_1}\| + \cdots + \|e_{j_n}\|,$$

onde a última soma é feita em $\mathbb{Z}$. Denotaremos por E^k, E^{k^*} e E^{∞} as álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas obtidas pelo método acima. Passando a uma graduação quociente módulo $2\mathbb{Z}$, é fácil ver que temos a correspondência:

$$\begin{aligned} E^k &\overset{(\text{mod } 2\mathbb{Z})}{\longmapsto} E_k, \\ E^{k^*} &\overset{(\text{mod } 2\mathbb{Z})}{\longmapsto} E_{k^*}, \\ E^{\infty} &\overset{(\text{mod } 2\mathbb{Z})}{\longmapsto} E_{\infty}. \end{aligned}$$

4.3 Identidades polinomiais para E^{k^*} e E^{∞}

Seja k um número inteiro não negativo. Por enquanto, vamos lidar com a $\mathbb{Z}$-graduação $E^{k^*} = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$. Nela, ocorre que $e_1, \ldots, e_k \in A_1$ e $e_n \in A_0$, para $n > k$. Claramente, se

$n > k$ ou $n < 0$, resulta que $A_n = 0$. Por conseguinte,

$$E^{k^*} = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_k,$$

ou seja, o suporte dessa graduação é $Sup(E^{k^*}) = \{0, 1, \ldots, k\}$.

Observação 4.3.1 *Para cada $t = 1, \ldots, k$, um monômio w está na componente A_t se, e somente se, w tem t fatores em $\{e_1, \ldots, e_k\}$.*

Sendo $\rho \in \mathbb{R}$ um número real qualquer, denote por

$$[\rho] = \text{ maior inteiro } \leq \rho.$$

Para $t = 1, \ldots, k$, temos que E^{k^*} satisfaz as seguintes identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas:

- $x_1^t x_2^t \cdots x_{[\frac{k}{t}]+1}^t$, onde a notação de potência indica o grau homogêneo da variável.
- x, se $\alpha(x) \notin \{0, \ldots, k\}$.
- $[x_1, x_2, x_3]$, para quaisquer graus $\alpha(x_1)$, $\alpha(x_2)$ e $\alpha(x_3)$.

Posteriormente, o seguinte lema será útil.

Lema 4.3.2 *Seja $f(x_1, \ldots, x_n) \in V_n$ um polinômio multilinear. Então $f \in T(E)$ (T-ideal ordinário) se, e somente se, para toda função $h : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, existem monômios $a_1, \ldots, a_n \in \beta_E$ de suportes disjuntos tais que, para todo $i = 1, \ldots, n$, tenhamos*

$$|supp(a_i)| \equiv h(i) \pmod{2\mathbb{Z}} \ e$$

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

Demonstração: Pode ser encontrada em [12]. ■

Observação 4.3.3 *Dado $1 \leq t \leq k$, vamos denotar por $V_{m,l_1,\ldots,l_t}$ o subespaço dos polinômios multilineares $\mathbb{Z}$-graduados com*

$$m \text{ variáveis de grau } 0 \longmapsto z_1, \ldots, z_m,$$

$$l_1 \text{ variáveis de grau 1} \longmapsto x_1^1, \ldots, x_{l_1}^1,$$

$$\vdots$$

$$l_t \text{ variáveis de grau } t \longmapsto x_1^t, \ldots, x_{l_t}^t.$$

Lema 4.3.4 *Seja $n = l_1 + l_2 + \cdots + l_t + m$ e considere $\psi : V_n \longrightarrow V_{m,l_1,\ldots,l_t}$ o isomorfismo linear induzido pela ação*

$$x_i \longmapsto \begin{cases} x_i^1, \ \textit{se } 1 \leq i \leq l_1 \\ x_{i-l_1}^2, \ \textit{se } l_1 + 1 \leq i \leq l_1 + l_2 \\ \vdots \\ x_{i-(l_1+\cdots+l_{t-1})}^t, \ \textit{se } l_1 + \cdots + l_{t-1} + 1 \leq i \leq l_1 + \cdots + l_{t-1} + l_t \\ z_i, \ \textit{caso contrário} \end{cases}.$$

Então,

1. *Para quaisquer $l_1, \ldots, l_t$, $m \in \mathbb{N}$,*

$$\psi(V_n \cap T(E)) = V_{m,l_1,\ldots,l_t} \cap T_{\mathbb{Z}}(E^{\infty}).$$

2. *Se $(1 \times l_1) + (2 \times l_2) + \cdots + (k \times l_k) \leq k$, então*

$$\psi(V_n \cap T(E)) = V_{m,l_1,\ldots,l_k} \cap T_{\mathbb{Z}}(E^{k^*}).$$

Demonstração: Vamos provar o segundo item. A inclusão da esquerda para direita é evidente. Provemos, portanto, a oposta. Suponha que

$$f(x_1^1, \ldots, x_{l_1}^1, \ldots, x_1^k, \ldots, x_{l_k}^k, z_1, \ldots, z_m) = \psi(f(x_1, \ldots, x_n)) \in T_{\mathbb{Z}}(E^{k^*})$$

é uma identidade polinomial multilinear $\mathbb{Z}$-graduada para E^{k^*}. Iremos mostrar que $f(x_1, \ldots, x_n) \in T(E)$.

Seja $h : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ uma função qualquer. Nossa ideia é usar o Lema 4.3.2, construindo uma substituição de suporte disjunto, que seja compatível com a função h e que seja $\mathbb{Z}$-graduada.

Como $(1 \times l_1) + (2 \times l_2) + \cdots + (k \times l_k) \leq k$, construa subconjuntos $X_{l_1}, X_{l_2}, \ldots, X_{l_k}$ de $X = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ disjuntos, de modo que X_{l_i} tenha $i \times l_i$ elementos, para todo $i = 1, \ldots, k$.

Agora divida cada conjunto X_{l_i} como união disjunta de l_i subconjuntos de cardinalidade i, isto é,

$$X_{l_i} = X_1^i \cup X_2^i \cup \cdots \cup X_{l_i}^i.$$

Dado s tal que $l_1 + \cdots + l_{i-1} + 1 \leq s \leq l_1 + \cdots + l_i$, defina

$$a_s = (\prod_{e_j \in X^i_{s-(l_1+\cdots+l_{i-1})}} e_j)e_s^\star,$$

onde

$$e_s^\star = 1 \Leftrightarrow i \equiv h(s) \pmod{2\mathbb{Z}},$$

e, caso contrário, o símbolo $e_s^\star$ deve ser trocado por algum gerador que esteja em A_0. Como há infinitos geradores em A_0, faça a escolha dos $e_s^\star$ de modo que a lista $Y = \{e_s^\star\}_{\forall s}$ não tenha elementos repetidos.

Agora, suponha $n \geq i > l_1 + \cdots + l_k$. Para estes casos construa monômios b_i, com fatores em A_0 e fora de $X \cup Y$, de modo que

$$|supp(b_i)| \equiv h(i) \pmod{2\mathbb{Z}} \text{ e } b_1, \ldots, b_m \text{ tenham suporte disjuntos.}$$

Dessa forma, a substituição

$$x_1 \longmapsto a_1,$$

$$x_2 \longmapsto a_2,$$

$$\vdots$$

$$x_{l_1+\cdots+l_t} \longmapsto a_{l_1+\cdots+l_t},$$

$$z_1 \longmapsto b_1,$$

$$z_2 \longmapsto b_2,$$

$$\vdots$$

$$z_m \longmapsto b_m,$$

é compatível com a função h. Além disso, essa substituição preserva a $\mathbb{Z}$-graduação E^{k^*} e assim

$$f(a_1, \ldots, b_m) = 0,$$

o que encerra a prova. ■

A seguir, iremos descrever um conjunto gerador das identidades polinomiais para E^{k^*} e E^{∞}. Sendo $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, definamos o conjunto $D = \{(l_1, \ldots, l_k) \in \mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0\}$ tal que

- A soma $1 \times l_1 + \cdots + k \times l_k$ satisfaz $1 \times l_1 + \cdots + k \times l_k \geq k + 1$.

Agora, para cada $(l_1, \ldots, l_k) \in D$, considere o conjunto C_D de todos os monômios multilineares da forma

$$x_1 x_2 \cdots x_n,$$

tendo l_i variáveis de grau i e $n = l_1 + \cdots + l_k$. Note que cada monômio $x_1^t x_2^t \cdots x_{[\frac{k}{t}]+1}^t$ pertence a C_D, para $t = 1, \ldots, k$.

Observe que tais monômios são identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas para E^{k^*}. Observe, também, todo elemento de C_D é consequência de alguma identidade da forma x, quando $\alpha(x) \notin \{0, \ldots, k\}$. A partir disso, temos o seguinte teorema.

Teorema 4.3.5 *Seja $T_{\mathbb{Z}}(E^d)$ o $T_{\mathbb{Z}}$-ideal de identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas para E^d, onde $d = \infty, k^*$. Então,*

1. *$T_{\mathbb{Z}}(E^{\infty})$ é gerado pelos seguintes polinômios:*
   - *$[x_1, x_2, x_3]$, para quaisquer graus $\alpha(x_1)$, $\alpha(x_2)$, $\alpha(x_3)$.*
   - *x, se $\alpha(x) < 0$.*
2. *$T_{\mathbb{Z}}(E^{k^*})$ é gerado pelos seguintes polinômios:*
   - *$[x_1, x_2, x_3]$, para quaisquer graus $\alpha(x_1)$, $\alpha(x_2)$, $\alpha(x_3)$.*
   - *x, se $\alpha(x) \notin \{0, \ldots, k\}$.*

Demonstração: Vamos provar o item 2 do teorema. O item 1 é semelhante. Seja I_k o $T_{\mathbb{Z}}$-ideal gerado pelas identidades 2. Claramente, $I_k \subset T_{\mathbb{Z}}(E^{k^*})$. Dada $f(x_1^1 \ldots, x_{l_k}^k, \ldots, z_m)$ uma identidade multilinear de E^{k^*}, podemos supor que $1 \times l_1 + \cdots + k \times l_k \leq k$ e que toda variável tem grau ≥ 0. Assim, pelo Lema 4.3.4, temos que $f(x_1,\ldots,x_n)$ é uma identidade para E. Disto, concluímos que f segue do comutador triplo, o que encerra a demonstração. ■

4.4 $\mathbb{Z}$-graduações por listas fixadas

Nesta seção, apresentamos um método geral para construir $\mathbb{Z}$-graduações da álgebra E, no qual as álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas E^{can}, E^{k^*}, E^{∞} e E^k se tornam apenas casos particulares.

Considere um número $l \in \mathbb{N}$ e uma lista $(n_1,\ldots,n_l)$ de inteiros não negativos, onde $n_1 < \cdots < n_l$. Escrevemos o espaço L na forma

$$L = L_{n_1} \oplus L_{n_2} \oplus \cdots \oplus L_{n_l},$$

onde estamos supondo que cada subespaço L_{n_j} é não nulo e é gerado por elementos da base $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$. Agora escolhemos a quantidade de elementos da base e_i em cada somando como espaço vetorial, digamos $\dim L_{n_j} = v_{n_j}$, onde $v_{n_j} \in \mathbb{N}$ ou $v_{n_j} = \infty$.

Usando o par de listas $(n_1,\ldots,n_l)$ e $(v_1,\ldots,v_l)$, vamos induzir uma $\mathbb{Z}$-graduação em E . Para este fim, definimos:

$$\|e_k\| = n_j \quad \text{se e somente se} \quad e_k \in L_{n_j}.$$

Para cada monômio $e_{k_1}e_{k_2}\cdots e_{k_s}$ pertencente a E, definimos

$$\|e_{k_1}e_{k_2}\cdots e_{k_s}\| = \|e_{k_1}\| + \|e_{k_2}\| + \cdots + \|e_{k_s}\|,$$

onde a última soma é feita em $\mathbb{Z}$. Assim, as duas listas $(n_1,\ldots,n_l)$ e $(v_1,\ldots,v_l)$ nos dão uma $\mathbb{Z}$-graduação em E. Ou seja, temos uma correspondência $(n_1,\ldots,n_l)$ e $(v_1,\ldots,v_l) \mapsto E^{v_1,\ldots,v_l}_{n_1,\ldots,n_l}$.

Observação 4.4.1 *Observe que E^{can}, E^{k^*}, E^{∞} e E^k são obtidas das listas*

- (1) *e* (∞),
- $(0,1)$ *e* (∞,k),
- $(0,1)$ *e* (∞,∞),

- $(0,1)$ *e* (k,∞).

respectivamente.

Observação 4.4.2 *Da maneira como construímos o método acima, todas as componentes homogêneas de grau negativo de uma tal $\mathbb{Z}$-graduação serão nulas. Contudo, podemos reformular a definição de modo que isso não ocorra. Para tanto, basta permitir que a primeira lista que induz a graduação tenha entradas negativas, ou seja, $(n_1,\ldots,n_l) \in \mathbb{Z}\times\cdots\times\mathbb{Z}$.*

Definição 4.4.3 *Dizemos que uma $\mathbb{Z}$-graduação $E = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} E_n$ é de cobertura finita se existe uma lista $(n_1,n_2,\ldots,n_k)$ de números inteiros tal que $L \subset E_{n_1}\oplus E_{n_2}\oplus\cdots\oplus E_{n_k}$.*

Observação 4.4.4 *Observe que*

- *Toda $\mathbb{Z}$-graduação de E definida por listas fixadas é de cobertura finita.*
- *Toda $\mathbb{Z}$-graduação de E de suporte finito é de cobertura finita, mas a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, a $\mathbb{Z}$-graduação E^{can} é de cobertura finita ($L \subset E^{(1)}$), mas não tem suporte finito.*

Ao longo de todo o capítulo, apenas estaremos interessados em $\mathbb{Z}$-graduações de E de cobertura finita.

4.4.1 $\mathbb{Z}$-graduações da forma (r), (∞)

Seja $r > 1$ um número inteiro. Seguindo o método anterior, consideremos a atribuição de $\mathbb{Z}$-grau:

$$\|e_n\| = r, \text{ para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Nesse caso, temos $\|e_{i_1}\cdots e_{i_n}\| = nr$ e, assim, a $\mathbb{Z}$-graduação $E_{(r)}^{(\infty)} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ é tal que

$$A_n = \begin{cases} 0, \text{ se } n < r \text{ e } n \neq 0 \\ F, \text{ se } n = 0 \\ span_F\{w\in\beta_E \mid |supp(w)| = m\}, \text{ se } n = rm \\ 0, \text{ se } n > r \text{ e } r \nmid n \end{cases}.$$

Nesse caso, temos uma $\mathbb{Z}$-graduação do tipo (r) e (∞).

Dessa forma, o suporte de uma tal graduação é infinito. Precisamente, ocorre que $Sup(E_{(r)}^{(\infty)}) = \{0, r, 2r, \ldots, nr, \ldots\}$.

Observação 4.4.5 *Se restringirmos a $\mathbb{Z}$-graduação $E_{(r)}^{(\infty)}$ ao seu suporte, temos um isomorfismo dos grupos $\mathbb{Z}$ e $Sup(E_{(r)}^{(\infty)})$, de modo que há uma correspondência (dada pela identidade) entre os graus de $E_{(r)}^{(\infty)}$ e E^{can}. Nesse sentido, as $\mathbb{Z}$-graduações $E_{(r)}^{(\infty)}$ e E^{can}, embora não $\mathbb{Z}$-isomorfas, serão* ***fracamente isomorfas****.*

Lema 4.4.6 *Os seguintes polinômios são identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas para $E_{(r)}^{(\infty)}$:*

- *x, se $0 < \alpha(x) < r$;*
- *x, se $\alpha(x) < 0$;*
- *x, se $\alpha(x) > r$ e $r \nmid \alpha(x)$;*
- *$[x_1, x_2]$, se $\alpha(x_1) = 2rn$, $\alpha(x_2) = rm$, para quaisquer n, $m \in \mathbb{N}$;*
- *$x_1x_2 + x_2x_1$, se $\alpha(x_1) = rn$, $\alpha(x_2) = rm$, para n, m números ímpares.*

Demonstração: Segue trivialmente. ∎

Mais geralmente, temos o teorema seguinte.

Teorema 4.4.7 *Considere E munida de uma $\mathbb{Z}$-graduação da forma (r), (∞). Então o $T_{\mathbb{Z}}$-ideal $T_{\mathbb{Z}}(E_{(r)}^{(\infty)})$ é gerado pelas identidades do Lema 4.4.6.*

Demonstração: A ideia é similar à demonstração feita no caso da $\mathbb{Z}$-graduação E^{can}. ∎

4.4.2 $\mathbb{Z}$-graduações da forma (p, q), $(1, \infty)$

Agora vamos considerar $\mathbb{Z}$-graduações induzidas por decomposições de tamanho 2. Para isso, sejam p, q números primos, com $p < q$. Consideremos uma decomposição da forma

$$L = L_p \oplus L_q.$$

Suponhamos que $\dim L_p = 1$ e $\dim L_q = \infty$. A menos de mudança de base, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $L_p = span_F\{e_1\}$ e $L_q = span_F\{e_2, e_3, \ldots\}$. Tal decomposição produz uma $\mathbb{Z}$-graduação $E_{p,q}^{1,\infty} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ da álgebra de Grassmann.

Observação 4.4.8 *Ressaltamos que a primalidade de p e q é fundamental para a descrição das componentes homogêneas da $\mathbb{Z}$-graduação induzida. Uma abordagem para listas de tamanho 2 sem a hipótese de primalidade se torna bem mais complicada.*

Vamos descrever as componentes homogêneas de $E_{p,q}^{1,\infty}$ e as respectivas identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas. Antes disso, definamos

$$C = \{px + qy \mid x = 0, 1 \text{ e } y = 0, 1, 2, \ldots\},$$

que é, precisamente, o suporte da graduação em questão. Consideremos

$$\begin{aligned} C_1 &= \{qy \mid y \text{ é par}\}, \\ C_2 &= \{qy \mid y \text{ é ímpar }\}, \\ C_3 &= \{p + qy \mid y \text{ é par }\} \text{ e} \\ C_4 &= \{p + qy \mid y \text{ é ímpar }\}. \end{aligned}$$

Obviamente,

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4.$$

Lembramos que $E_{can} = E_{(0)} \oplus E_{(1)}$ denota a $\mathbb{Z}_2$-graduação natural de E. Sendo $y \in \mathbb{N}$, adotamos a notação:

$E^y(e_n)$: subespaço de E gerado pelos monômios de tamanho y sem o fator e_n;

$E^y[e_n]$: subespaço de E gerado pelos monômios de tamanho $y + 1$ com fator e_n.

Usando a notação anterior, vemos que a $\mathbb{Z}$-graduação $E_{p,q}^{1,\infty}$ tem componentes dadas por

$$A_n = \begin{cases} 0, \text{ se } n \notin C \\ F, \text{ se } n = 0 \\ E_{(0)} \cap E^y(e_1), \text{ se } n \in C_1 \text{ e } n = qy \\ E_{(1)} \cap E^y(e_1), \text{ se } n \in C_2 \text{ e } n = qy \\ E_{(1)} \cap E^y[e_1], \text{ se } n \in C_3 \text{ e } n = p + qy \\ E_{(0)} \cap E^y[e_1], \text{ se } n \in C_4 \text{ e } n = p + qy \end{cases}, \text{ com } y \neq 0.$$

Lema 4.4.9 *A álgebra $\mathbb{Z}$-graduada $E_{p,q}^{1,\infty} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ satisfaz as seguintes identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas:*

- x, *se* $\alpha(x) \notin C$;
- $[x_1, x_2]$, *se* $\alpha(x_1) \in C_1 \cup C_4$;
- $x_1x_2 + x_2x_1$, *se* $\alpha(x_1)$, $\alpha(x_2) \in C_2 \cup C_3$;
- x_1x_2, *se* $\alpha(x_1)$, $\alpha(x_2) \in C_3 \cup C_4$.

Demonstração: A demonstração consiste numa fácil verificação. ∎

Proposição 4.4.10 *O $T_{\mathbb{Z}}$-ideal $T_{\mathbb{Z}}(E_{p,q}^{1,\infty})$ de identidades graduadas da $\mathbb{Z}$-graduação $E_{p,q}^{1,\infty}$ é gerado pelas identidades do Lema 4.4.9.*

A proposição precedente é um caso particular de um resultado mais geral que provaremos na próxima seção.

4.4.3 $\mathbb{Z}$-graduações da forma (p, q), (k, ∞)

A ideia desta seção é generalizar a seção anterior. Para tanto, sejam p, q números primos, com $p < q$. Novamente, consideramos uma decomposição da forma

$$L = L_p \oplus L_q.$$

Suponhamos que $\dim L_p = k < p$ e $\dim L_q = \infty$. Reordenando a base, se necessário, podemos assumir que $L_p = span_F\{e_1, \ldots, e_k\}$ e $L_q = span_F\{e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots\}$.

Assim, obtemos a $\mathbb{Z}$-graduação induzida $E_{p,q}^{k,\infty} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$, cujo suporte é $C = \{px + qy \mid x = 0, 1, \ldots, k \text{ e } y = 0, 1, 2, \ldots\}$.

Considere

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{qy \mid y \text{ é par}\},\\
C_2 &= \{qy \mid y \text{ é ímpar}\},\\
D_i &= \{pi + qy \mid y \equiv (i+1) \pmod{\mathbb{Z}_2}\},\\
\hat{D}_i &= \{pi + qy \mid y \equiv i \pmod{\mathbb{Z}_2}\},
\end{aligned}$$

para $i = 1, \ldots, k$.

Claramente, temos que

$$C = C_1 \cup C_2 \cup D_1 \cup \hat{D}_1 \cup \cdots \cup D_k \cup \hat{D}_k.$$

Aqui usaremos a notação

$$E_t{}^y[e_1, \ldots, e_k] : \text{ todos os monômios de tamanho } y + t \text{ com } t \text{ fatores em } \{e_1, \ldots, e_k\}.$$

$$E^y(e_1, \ldots, e_k) : \text{ todos os monômios de tamanho } y \text{ sem fatores em } \{e_1, \ldots, e_k\}.$$

Usando notação anterior, temos a seguinte descrição:

$$A_n = \begin{cases} 0, \text{ se } n \notin C \\ F, \text{ se } n = 0 \\ E_{(0)} \cap E^y(e_1, \ldots, e_k), \text{ se } n \in C_1 \text{ e } n = qy, y \neq 0 \\ E_{(1)} \cap E^y(e_1, \ldots, e_k), \text{ se } n \in C_2 \text{ e } n = qy, \\ E_{(1)} \cap E_i^y[e_1, \ldots, e_k], \text{ se } n \in D_i \text{ e } n = pi + qy \\ E_{(0)} \cap E_i^y[e_1, \ldots, e_k], \text{ se } n \in \hat{D}_i \text{ e } n = pi + qy \end{cases}.$$

Lema 4.4.11 *Considere $k, p, q \in \mathbb{N}$, onde p, q são números primos e $k < p < q$. Então a álgebra $\mathbb{Z}$-graduada $E_{p,q}^{k,\infty}$ satisfaz:*

- *x, se $\alpha(x) \notin C$;*
- *$[x_1, x_2]$, se $\alpha(x_1) \in \{0\} \cup C_1 \cup \hat{D}_1 \cup \cdots \cup \hat{D}_k$;*
- *$x_1x_2 + x_2x_1$, se $\alpha(x_1), \alpha(x_2) \in C_2 \cup D_1 \cup \cdots \cup D_k$;*
- *$x_1 \cdots x_{l_1} u_1 \cdots u_{l_2} \cdots w_1 \cdots w_{l_k}$, se $\alpha(x) \in D_1 \cup \hat{D}_1, \ldots, \alpha(w) \in D_k \cup \hat{D}_k$ e $1 \times l_1 + \cdots + k \times l_k > k$.*

Teorema 4.4.12 *O $T_{\mathbb{Z}}$-ideal da álgebra $\mathbb{Z}$-graduada $E_{p,q}^{k,\infty}$ é gerado pelas identidades do Lema 4.4.11.*

Demonstração: Seja $f(z_1, \ldots, z_n)$ uma identidade $\mathbb{Z}$-graduada multilinear de $E_{p,q}^{k,\infty}$ e seja I o $T_{\mathbb{Z}}$-ideal gerado pelas identidades do Lema 4.4.11. Supondo que $f \notin I$, provemos que

f não se anula em $E^{k,\infty}_{p,q}$. Claramente, podemos assumir que $\alpha(z_i) \in C$, para $i = 1, \ldots, n$. Módulo as identidades $[x_1, x_2]$ e $x_1x_2 + x_2x_1$, existe $\beta \neq 0$ tal que:

$$f = \beta x_1 \cdots x_{l_1} u_1 \cdots u_{l_2} \cdots w_1 \cdots w_{l_k} \theta_1 \cdots \theta_s,$$

onde $n = l_1 + l_2 + \cdots + l_k + s$ e

$$\alpha(x) \in D_1 \cup \hat{D}_1,$$

$$\vdots$$

$$\alpha(w) \in D_k \cup \hat{D}_k,$$

$$\alpha(\theta) \in C_1 \cup C_2.$$

Devido às últimas identidades que descrevem I, podemos supor que

$$1 \times l_1 + \cdots + k \times l_k \leq k.$$

Neste caso, é fácil exibir uma substituição $\mathbb{Z}$-graduada que não anula f. ■

4.5 $\mathbb{Z}$-graduações com componente negativa não nula

Nas seções precedentes, todas as $\mathbb{Z}$-graduações $E = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ investigadas satisfazem a condição $A_n = 0$, sempre que $n < 0$. Aqui iremos fazer uma breve análise de situações onde isso não ocorre. Visando isto, consideremos a decomposição

$$L = L_{-1} \oplus L_1$$

em que $L_{-1} = span_F\{e_1, e_3, e_5, \ldots\}$ e $L_1 = span_F\{e_2, e_4, e_6, \ldots\}$.

Da mesma forma que anteriormente, temos induzida uma $\mathbb{Z}$-graduação em E, que denotamos por $E^{(\infty,\infty)}_{(-1,1)}$ ou, simplesmente, por $E_{(-1,1)} = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$.

Agora fixemos um número inteiro $r \geq 0$. Seja

$$w = e_{i_1} \cdots e_{i_l} e_{j_1} \cdots e_{j_k}$$

um monômio de E e, a menos de sinal, suponha que $i_1, \ldots, i_l$ são números ímpares e $j_1, \ldots, j_k$ são números pares. Neste caso, temos

$$w \in A_r \quad \text{se, e somente se,} \quad k - l = r,$$

onde $k \geq r$. Assim, $l = k - r$ e concluímos que A_r é gerado pelos monômios w com k fatores em L_1 e $l = k - r$ fatores em L_{-1}, para $k \geq r$. Obviamente um monômio w desse tipo tem comprimento $|supp(w)| = 2k - r$ e, portanto, o comprimento de w tem a mesma paridade que r.

Usando a mesma ideia, se $r < 0$, temos que A_r é gerado pelos monômios w com k ($k \geq |r| > 0$) fatores em L_{-1} e $l = k - |r|$ fatores in L_1. Neste caso $|supp(w)| = 2k - |r|$ e, então, novamente o comprimento de w tem a mesma paridade que $|r|$.

Claramente, a estrutura $E_{(-1,1)}$ não tem componentes homogêneas nulas, ou seja, $Sup(E_{(-1,1)}) = \mathbb{Z}$.

Como consequência dos comentários anteriores, temos o seguinte lema.

Lema 4.5.1 *Seja $r \geq$ um número inteiro e considere a $\mathbb{Z}$-graduação $E_{(-1,1)} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ e a $\mathbb{Z}_2$-graduação natural $E_{can} = E_{(0)} \oplus E_{(1)}$. Então A_r, $A_{-r} \subset E_{(0)}$, se r é um número par e A_r, $A_{-r} \subset E_{(1)}$, se r é um número ímpar.*

Demonstração: Segue diretamente do que foi comentado acima. ■

Observação 4.5.2 (Breve comentário sobre polinômios centrais) *Um outro conceito bastante forte na PI-Teoria é a noção de polinômio central. Sendo $\mathcal{A}$ uma álgebra, um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ diz-se central quando $f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(\mathcal{A})$, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$. Sendo $C(\mathcal{A})$ o conjunto de todos os polinômios centrais de $\mathcal{A}$, prova-se que $C(\mathcal{A})$ é um T-espaço, ou seja, é um subespaço de $F\langle X \rangle$ invariante por endomorfismos. Mais ainda, se $\mathcal{A} = \bigoplus_{g \in G} A_g$ é G-graduada, seguindo a mesma ideia usada para identidades G-graduadas, podemos falar em polinômios centrais G-graduados. Denotando por $C_G(\mathcal{A})$ o conjunto de todos os polinômios centrais G-graduados de $\mathcal{A}$, prova-se que $C_G(\mathcal{A})$ é um T_G-espaço. Um problema recorrente é descrever o T_G-espaço de uma dada álgebra G-graduada. Para um maior aprofundamento sobre polinômios centrais, recomendamos o Capítulo 5 de [20].*

Lema 4.5.3 *A álgebra $\mathbb{Z}$-graduada $E_{(-1,1)}$ satisfaz as seguintes identidades:*

(i) $[x_1, x_2]$, *se* $|\alpha(x_1)|$ *ou* $|\alpha(x_2)|$ *é par;*

(ii) $x_1x_2 + x_2x_1$, *se* $|\alpha(x_1)|$ *e* $|\alpha(x_2)|$ *são ímpares.*

Demonstração: Basta aplicar o Lema 4.5.1. ■

Proposição 4.5.4 *O* $T_{\mathbb{Z}}$*-ideal de identidades polinomiais* $\mathbb{Z}$*-graduadas de* $E_{(-1,1)}$ *é gerado pelas identidades do Lema 4.5.3.*

Demonstração: Seja I o $T_{\mathbb{Z}}$-ideal gerado pelas identidades do Lema 4.5.3. Provaremos que $T_{\mathbb{Z}}(E_{(-1,1)}) \subset I$. Seja $f(x_1, \ldots, x_n) \in T_{\mathbb{Z}}(E_{(-1,1)})$ uma identidade multilinear para $E_{(-1,1)}$. Usando as identidades (i), (ii) e (iii), podemos assumir que

$$f = \beta x_1 \ldots x_l x_{l+1} \ldots x_{l+m},$$

onde $|\alpha(x_j)|$ é par, se $j = 1, \ldots, l$ e $|\alpha(x_{l+i})|$ é ímpar, se $i = 1, \ldots, m$.

Segue que $\beta = 0$, o que finaliza a demonstração. ■

Corolário 4.5.5 *O* $T_{\mathbb{Z}}$*-espaço de polinômios centrais* $\mathbb{Z}$*-graduados para* $E_{(-1,1)}$ *é gerado pelos seguintes polinômios:*

1. x, *se* $|\alpha(x)|$ *é par;*

2. $u_3[x_1, x_2]u_4$, *se* $|\alpha(x_1)|$ *ou* $|\alpha(x_2)|$ *é par e* u_3, $u_4 \in X \cup \{1\}$*;*

3. $u_3(x_1x_2 + x_2x_1)u_4$, *se* $|\alpha(x_1)|$, $|\alpha(x_2)|$ *são ímpares e* u_3, $u_4 \in X \cup \{1\}$.

Demonstração: A prova é trivial e, por isso, será omitida. ■

Observação 4.5.6 *Pelos resultados anteriores, concluímos que as identidades polinomiais* $\mathbb{Z}$*-graduadas (e também os polinômios centrais* $\mathbb{Z}$*-graduados) de* E^{can} *e* $E_{(-1,1)}$ *têm um comportamento similar. Ambas as estruturas satisfazem identidades do tipo* $[x_1, x_2]$ *e* $x_1x_2 + x_2x_1$*. A diferença é que* E^{can} *satisfaz a identidade de nilpotência* $x = 0$*, se* $\alpha(x) < 0$*, mas* $E_{(-1,1)}$ *não a satisfaz. No que segue, vamos generalizar essa ideia.*

Definição 4.5.7 *Sejam* Z_0, Z_1, Z_2 *subconjuntos de* $\mathbb{Z}$ *tais que* $\mathbb{Z} = Z_0 \cup Z_1 \cup Z_2$ *como união disjunta. Definimos o* $T_{\mathbb{Z}}$*-ideal* I_{Z_0,Z_1,Z_2} *como o* $T_{\mathbb{Z}}$*-ideal gerado por*

(i) $[x_1, x_2]$, *se* $\alpha(x_1) \in Z_0$ *ou* $\alpha(x_2) \in Z_0$.

(ii) $x_1x_2 + x_2x_1$, *se* $\alpha(x_1) \in Z_1$ *e* $\alpha(x_2) \in Z_1$.

(iii) x, *se* $\alpha(x) \in Z_2$.

Definimos o $T_{\mathbb{Z}}$*-espaço* J_{Z_0,Z_1,Z_2} *como o* $T_{\mathbb{Z}}$*-espaço gerado por* I_{Z_0,Z_1,Z_2} *junto com* x, *para* $\alpha(x) \in Z_0$.

De posse da definição anterior, formulamos o seguinte teorema.

Teorema 4.5.8 *Sejam* $E_{can} = E_{(0)} \oplus E_{(1)}$ *a* $\mathbb{Z}_2$*-graduação natural de* E *e* $B = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ *uma* $\mathbb{Z}$*-graduação em* E *tal que:*

1. *Se* $A_r \neq 0$ *então* $A_r \subset E_{(0)}$ *ou* $A_r \subset E_{(1)}$.
2. *Para duas quaisquer componentes* $A_s, A_r \neq 0$ *existem infinitos monômios de suportes disjuntos em* A_r *e* A_s.

Então existem conjuntos Z_0, Z_1 *e* Z_2 *tais que* $T_{\mathbb{Z}}(B) = I_{Z_0,Z_1,Z_2}$ *e* $C_{\mathbb{Z}}(B) = J_{Z_0,Z_1,Z_2}$.

Demonstração: Suponhamos uma $\mathbb{Z}$-graduação em E satisfazendo as condições anteriores. Sejam

$$\begin{aligned} Z_0 &= \{r \in \mathbb{Z} \mid A_r \subset E_{(0)}\}, \\ Z_1 &= \{r \in \mathbb{Z} \mid A_r \subset E_{(1)}\}, \\ Z_2 &= \{r \in \mathbb{Z} \mid A_r = 0\}. \end{aligned}$$

Claramente, temos que $I_{Z_0,Z_1,Z_2} \subset T_{\mathbb{Z}}(B)$. Vamos provar a inclusão oposta. Para isso, consideremos $f(x_1, \ldots, x_n) \in T_{\mathbb{Z}}(B)$ um polinômio multilinear. Módulo as identidades de I_{Z_0,Z_1,Z_2}, podemos escrever

$$f = \beta x_1 \ldots x_l x_{l+1} \ldots x_{l+m},$$

onde $\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_l) \in Z_0$ e $\alpha(x_{l+1}), \ldots, \alpha(x_{l+m}) \in Z_1$. Pela condição 2, existem monômios de suportes disjuntos em cada componente $A_{\alpha(x_1)}, \ldots, A_{\alpha(x_{l+m})}$. Dessa forma, $\beta = 0$ e $f(x_1, \ldots, x_n) \in I_{Z_0,Z_1,Z_2}$ e obtemos $T_{\mathbb{Z}}(B) = I_{Z_0,Z_1,Z_2}$.

Agora vamos provar a segunda parte do teorema. Como $I_{Z_0,Z_1,Z_2} \subset J_{Z_0,Z_1,Z_2}$, novamente temos

$$f = \beta x_1 \ldots x_l x_{l+1} \ldots x_{l+m},$$

nas mesmas condições que anteriormente. Se $\beta \neq 0$ e m é ímpar, pela condição 2 existe substituição $\mathbb{Z}$-graduada cujo resultado não pertence a $Z(E)$. Portanto, temos que $\beta = 0$ ou m é par. Em ambos os casos, concluímos que $C_{\mathbb{Z}}(B) = J_{Z_0,Z_1,Z_2}$. ■

4.6 As álgebras E^{can}, E^{k^*} e E^{∞} em característica positiva

Nesta seção vamos considerar F um corpo infinito de característica $p > 2$. Iremos estudar as identidades graduadas para as $\mathbb{Z}$-graduações E^{can}, E^{k^*} e E^{∞} sobre F. As técnicas aqui usadas são adaptações de alguns dos resultados de [10]. Aqui precisamos lidar com as identidades multi-homogêneas, sendo esta a principal diferença entre os resultados aqui trazidos e os apresentados nas seções anteriores.

Observação 4.6.1 *Um polinômio $\mathbb{Z}$-graduado diz-se um polinômio 0-próprio quando todas as suas variáveis de grau zero ocorrem em comutadores. Numa PI-álgebra associativa e unitária sobre um corpo infinito e $\mathbb{Z}$-graduada, é sabido que suas identidades graduadas seguem de suas identidades 0-próprias. Por este motivo, em boa parte dos argumentos usados nesta seção, nos restringiremos às identidades graduadas 0-próprias.*

4.6.1 Identidades para E^{can} em característica positiva

Aqui vamos considerar a graduação E^{can} sobre um corpo F infinito cuja característica é o número primo $p > 2$.

Teorema 4.6.2 *Sobre um corpo infinito F de característica $p > 2$, todas as identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas de E^{can} são consequências das seguintes identidades graduadas:*

- *x, se $\alpha(x) < 0$;*
- *$[x_1, x_2]$, se $\alpha(x_1)$ ou $\alpha(x_2)$ é par;*
- *$x_1x_2 + x_2x_1$, se $\alpha(x_1)$ e $\alpha(x_2)$ são números ímpares;*
- *x^p, se $\alpha(x) > 0$ é par.*

Demonstração: Vamos usar a técnica dos polinômios 0-próprios. Seja $f(x_1,\ldots,x_n)$ uma identidade 0-própria de E^{can}. Desde que $[x,y]$ é uma identidade se $\alpha(x)$ é par, podemos assumir que todas as variáveis ocorrendo em f têm grau homogêneo maior que zero. A identidade $x_1x_2+x_2x_1$ (x_1 e x_2 de grau ímpar) implica que $x^2=0$, se $\alpha(x)$ é ímpar. Logo, podemos supor que todas as variáveis ímpares de f são multilineares. Por outro lado, a identidade x^p (quando $\alpha(x)$ é par) nos permite escrever

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\beta x_1^{l_1}\cdots x_v^{l_v}x_{v+1}\cdots x_n,$$

onde $\alpha(x_i)$ é par se $i=1,\ldots,v$, $\alpha(x_i)$ é ímpar se $i=v+1,\ldots,n$ e $l_i<p$ para $i=1,\ldots,v$. Assim, podemos fazer a substituição graduada

$$x_1=e_1e_2+\cdots+e_{2l_1-1}e_{2l_1}$$

e, analogamente, para as variáveis $x_2,\ldots,x_v$. Já as variáveis de grau ímpar são trocadas por monômios de suporte disjuntos e que não tenham fatores em comum com as substituições feitas para $x_1,\ldots,x_v$. Disto segue que f se anula sobre E^{can} se, e somente se, $\beta=0$. ■

Observe que há uma forte semelhança entre as identidades de E^{can} sobre corpos de característica zero e corpos de característica positiva. Como uma aplicação direta da última demonstração, temos o corolário seguinte.

Corolário 4.6.3 *Sobre um corpo infinito F de característica $p>2$, todas as identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas de $E_{(r)}^{(\infty)}$ são consequências das seguintes identidades graduadas:*

- x, *se* $0<\alpha(x)<r$ *ou* $\alpha(x)<0$ *ou* $\alpha(x)>r$ *e* $r\nmid\alpha(x)$;
- $[x_1,x_2]$, *se* $\alpha(x_1)=2rn$, $\alpha(x_2)=rm$, *para quaisquer* n, $m\in\mathbb{N}$;
- $x_1x_2+x_2x_1$, *se* $\alpha(x_1)=rn$, $\alpha(x_2)=rm$, *para quaisquer ímpares* n, $m\in\mathbb{N}$ *ímpares;*
- x^p, *se* $\alpha(x)=nr$, *onde* n *é um número par.*

Demonstração: É o mesmo argumento usado no teorema anterior. ■

4.6.2 Identidades para E^{k^*} em característica positiva

A fim de descrever as identidades de E^{k^*} sobre corpos infinitos de característica positiva, precisamos expor alguns fatos (clássicos na PI-Teoria) que serão úteis. Assumiremos que a característica do corpo é diferente de 2. Aqui enunciamos, em sequência, resultados que servirão de ferramentas nesta seção.

Teorema 4.6.4 *Seja E a álgebra de Grassmann sobre um corpo infinito. Então*

1. *O T-ideal de identidades polinomiais de E é $I = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$.*
2. *O polinômio $[x_1, x_2][x_1, x_3]$ pertence a I.*

Demonstração: Pode ser encontrada em [19]. ■

Proposição 4.6.5 *Se $char(F) = p > 0$, então E^{k^*} satisfaz a identidade x^p, onde o grau $\alpha(x)$ é não nulo.*

Demonstração: Segue diretamente das identidades da álgebra de Grassmann sem unidade em característica $p > 2$, ver [39]. ■

Lema 4.6.6 *Os monômios $x_1^t x_2^t \cdots x_{[\frac{k}{t}]+1}^t$ são identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas de E^{k^*}, para cada $t = 1, \ldots, k$.*

Demonstração: É a mesma ideia usada no caso de corpos de característica zero. ■

Lema 4.6.7 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, o polinômio $t_{2n} = [z_1, z_2][z_3, z_4] \cdots [z_{2n-1}, z_{2n}]$ não é identidade $\mathbb{Z}$-graduada de E^{k^*}, onde $\alpha(z_j) = 0$ para $j = 1, \ldots, 2n$.*

Demonstração: É suficiente notar que $t_{2n}(e_{k+1}, \ldots, e_{k+2n}) = 2^n e_{k+1} \cdots e_{k+2n} \neq 0$. ■

O seguinte lema terá bastante importância. A ideia usada aqui é similar à ideia trazida no Lema 4.4 de [10].

Lema 4.6.8 *Considere o monômio $T = (x_1^1)^{r_1^1} \cdots (x_{l_1}^1)^{r_{l_1}^1} \cdots (x_1^k)^{r_1^k} \cdots (x_{l_k}^k)^{r_{l_k}^k}$ tal que $\sum_{i=1}^{k} i(r_1^i + \cdots + r_{l_i}^i) \leq k$. Seja $r = \max\{r_1^1, \ldots, r_{l_k}^k\}$ e suponha que $p > r$. Então T não é identidade polinomial $\mathbb{Z}$-graduada de E^{k^*}.*

Demonstração: Para cada $i = 1, \ldots, k$ e $t = 1, \ldots, l_i$, considere os subconjuntos $X_i^{r_t^i} \subset \{e_1, \ldots, e_k\}$ tais que $|X_i^{r_t^i}| = ir_t^i$. Como $\sum_{i=1}^{k} i(r_1^i + \cdots + r_{l_i}^i) \leq k$, podemos construir tais conjuntos de modo que $X_i^{r_t^i} \cap X_j^{r_s^j} = \emptyset$ para i, $j = 1, \ldots, k$, $t = 1, \ldots l_i$ e $s = 1, \ldots, l_j$. Agora seja $M_i^{r_t^i}$ um conjunto de r_t^i monômios de tamanho i com suportes disjuntos e com fatores em $X_i^{r_t^i}$.

Considere a avaliação $\varphi : F\langle X|\mathbb{Z}\rangle \to E$ dada por

$$x_t^i \longrightarrow \sum_{w \in M_i^{r_t^i}} ww^*,$$

onde

$$w^* = \begin{cases} 1, \text{ se } i \text{ é par} \\ e_*, \text{ se } i \text{ é ímpar} \end{cases},$$

e, no segundo caso, escolhemos diferentes geradores e_* fora de $\{e_1, \ldots, e_k\}$ (existem infinitos).

Neste caso, segue que

$$\varphi((x_1^1)^{r_1^1} \cdots (x_{l_1}^1)^{r_{l_1}^1} \cdots (x_1^k)^{r_1^k} \cdots (x_{l_k}^k)^{r_{l_k}^k}) = \prod_{i=1}^{k} \prod_{t=1}^{l_i} r_t^i!m,$$

onde m é um monômio não nulo. A desigualdade $p > r$ implica que a última avaliação é não nula. ∎

Agora definimos o conjunto $D = \{(r_1^1, \ldots, r_{l_1}^1, \ldots, r_1^k, \ldots, r_{l_k}^k) \in \mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0\}$ tal que

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i(r_1^i + \cdots + r_{l_i}^i) \geq k + 1.$

Considere C_D como o conjunto dos polinômios $x_1x_2 \cdots x_n$ com $r_1^i + \cdots + r_{l_i}^i$ variáveis de grau i, para cada $(r_1^1, \ldots, r_{l_1}^1, \ldots, r_1^k, \ldots, r_{l_k}^k) \in D$, onde $n = \displaystyle\sum_{i=1}^{k}(r_1^i + \cdots + r_{l_i}^i)$.

Neste contexto, temos o seguinte fato.

Lema 4.6.9 *Cada polinômio $x_1x_2 \cdots x_n \in C_D$ é uma identidade polinomial $\mathbb{Z}$-graduada de E^{k^*}.*

Demonstração: Basta notar que todo elemento de C_D tem grau homogêneo $\geq k + 1$ e, portanto, segue de alguma identidade da forma x, com $\alpha(x) \notin \{0, \ldots, k\}$. ∎

Neste momento apresentamos o principal resultado desta subseção.

Teorema 4.6.10 *Sejam p, $k \in \mathbb{N}$, onde p é primo. Sobre um corpo F infinito e de característica $p > 2$ tal que $p > k$, todas as identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas de E^{k^*} são consequências das seguintes identidades:*

- *x, se $\alpha(x) \notin \{0, 1, \ldots, k\}$;*
- *$[x_1, x_2, x_3]$, para quaisquer graus $\alpha(x_1)$, $\alpha(x_2)$, $\alpha(x_3)$;*

Por outro lado, se $p \leq k$, todas as identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas de E^{k^*} são consequências das seguintes identidades:

- *x, se $\alpha(x) \notin \{0, 1, \ldots, k\}$;*
- *$[x_1, x_2, x_3]$, para quaisquer graus $\alpha(x_1)$, $\alpha(x_2)$, $\alpha(x_3)$;*
- *$(x^t)^p$, se $pt \leq k$, para $t \in \{1, \ldots, k\}$.*

Demonstração: Suponhamos que $p > k$. Sendo $f(x_1, \ldots, x_n)$ uma identidade polinomial $\mathbb{Z}$-graduada de E^{k^*}, podemos assumir que f é multi-homogêneo, 0-próprio e que todas as suas variáveis têm grau em $\{0, 1, \ldots, k\}$. Devido à identidade $[x_1, x_2, x_3]$, podemos assumir que todos os comutadores ocorrendo em f são da forma $[x_a, x_b]$. Assim, f pode ser reduzido à forma

$$\sum \beta x^1_{i_1} \cdots x^1_{i_l} \cdots x^k_{u_1} \cdots x^k_{u_p} [z_1, z_2] \cdots [z_{s-1}, z_s][x^1_{j_1}, x^1_{j_2}] \cdots [x^k_{v_1}, x^k_{v_2}],$$

onde os índices estão ordenados. Note que estamos supondo s par. Quando s é ímpar, usa-se uma ideia similar.

Seja h_i o número de distintas variáveis de grau i ocorrendo em f e suponha que para cada $t = 1, \ldots, h_i$, tenhamos $deg_{x^i_t}(f) = r^i_t$. Pelo Teorema 4.6.4, podemos assumir que f é multilinear nos comutadores. Portanto cada somando pode ser escrito como

$$(x^1_1)^{d^1_1} \cdots (x^1_{h_1})^{d^1_{h_1}} \cdots (x^k_1)^{d^k_1} \cdots (x^k_{h_k})^{d^k_{h_k}} [z_1, z_2] \cdots [z_{s-1}, z_s][\overline{x^1_1}, *] \cdots [*, \overline{x^k_{h_k}}],$$

onde $d^i_t \in \{r^i_t, r^i_t - 1\}$, a notação $\overline{x}$ significa que a variável x pode ocorrer ou não e os índices estão ordenados. Podemos assumir que $\sum_{i=1}^k i(r^i_1 + \cdots + r^i_{h_i}) \leq k$. Suponha que os polinômios anteriores não são linearmente independentes módulo $T_{\mathbb{Z}}(E^{k^*})$. Assim, existem coeficientes não-nulos tais que

$$\sum \beta (x_1^1)^{d_1^1} \cdots (x_{h_1}^1)^{d_{h_1}^1} \cdots (x_1^k)^{d_1^k} \cdots (x_{h_k}^k)^{d_{h_k}^k} [z_1, z_2] \cdots [z_{s-1}, z_s][\overline{x_1^1}, *] \cdots [*, \overline{x_{h_k}^k}] \in T_{\mathbb{Z}}(E^{k^*}).$$

Consideremos a substituição $\varphi : F\langle X|\mathbb{Z}\rangle \to E$ dada por:

$$z_i \longmapsto e_{k+i}$$

e, para as outras variáveis, repetimos a construção de 4.6.8. Assim,

$$f_1 = (x_1^1)^{r_1^1} \cdots (x_{h_1}^1)^{r_{h_1}^1} \cdots (x_1^k)^{r_1^k} \cdots (x_{h_k}^k)^{r_{h_k}^k} [z_1, z_2] \cdots [z_{s-1}, z_s]$$

é o único somando não-nulo de f na substituição φ. Segue que o coeficiente de f_1 é nulo. Usando uma ideia similar, exibimos substituições que implicam nos demais coeficientes nulos, o que completa a prova. ■

4.6.3 Identidades para E^∞ em característica positiva

Objetivando descrever as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de E^∞ sobre um corpo infinito de característica $p > 2$, observamos que o Lema 4.6.8 também é válido para E^∞. Portanto, temos:

Lema 4.6.11 *Considere o monômio $T = (x_1^1)^{r_1^1} \cdots (x_{l_1}^1)^{r_{l_1}^1} \cdots (x_1^k)^{r_1^k} \cdots (x_{l_k}^k)^{r_{l_k}^k}$, seja $r = \max\{r_1^1, \ldots, r_{l_k}^k\}$ e suponha que $p > r$. Então T não é identidade polinomial $\mathbb{Z}$-graduada de E^∞.*

Demonstração: Note que cada componente homogênea de grau não negativo tem infinitos monômios de comprimento par, comprimento ímpar e suportes disjuntos. Neste caso é trivial exibir uma substituição que não anula T. ■

Usando o lema precedente, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 4.6.12 *Sobre um corpo F infinito de característica $p > 2$, as identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas de E^∞ são consequências das seguintes identidades:*

- $[x_1, x_2, x_3]$, *para quaisquer graus* $\alpha(x_1)$,$\alpha(x_2)$, $\alpha(x_3)$;

- x, *se* $\alpha(x) < 0$;

- x^p, *se* $\alpha(x) \geq 1$.

Demonstração: Basta usar a mesma ideia do Teorema 4.6.10. ■

4.7 Discussões adicionais

Resumidamente, ao longo do capítulo estudamos as seguintes estruturas:

a	(1)	(∞)	E^{can}	característica zero e corpos infinitos
b	$(0,1)$	(∞,k)	E^{k^*}	característica zero e corpos infinitos
c	$(0,1)$	(∞,∞)	E^{∞}	característica zero e corpos infinitos
d	(r)	(∞)	$E_{(r)}^{(\infty)}$	característica zero e corpos infinitos
e	(p,q)	(k,∞)	$E_{p,q}^{k,\infty}$	característica zero, $k < p < q$

Com base nas discussões anteriores sobre as $\mathbb{Z}$-graduações da álgebra de Grassmann, é possível provar os seguintes fatos:

Teorema 4.7.1 *Sejam* r, $s \in \mathbb{N}$. *Então* $E_{(r)}^{(\infty)}$ *e* $E_{(s)}^{(\infty)}$ *são isomorfas como álgebras* $\mathbb{Z}$-*graduadas se, e somente se,* $r = s$.

Teorema 4.7.2 *Considere o par de listas* $\eta = (0, 1, n_3, \ldots, n_l)$ *e* $\lambda = (\infty, \infty, v_3, \ldots, v_l)$, *onde* $1 < n_3 < \cdots < n_l$, *e seja* $E_{(\eta)}^{(\lambda)}$ *a* $\mathbb{Z}$-*graduação induzida, sobre um corpo* F *de característica zero. Então, o* $T_{\mathbb{Z}}$-*ideal de identidades graduadas de* $E_{(\eta)}^{(\lambda)}$ *é gerado por*

- x, *se* $\alpha(x) < 0$.
- $[x_1, x_2, x_3]$, *para quaisquer graus* $\alpha(x_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Esses dois teoremas nos levam a formular a questão (i) abaixo e também temos interesse nas questões (ii), (iii) e (iv):

(i) Se as $\mathbb{Z}$-graduações $E_{(n_1,\ldots,n_l)}^{(v_1,\ldots,v_l)}$ e $E_{(m_1,\ldots,m_t)}^{(u_1,\ldots,u_t)}$ são equivalentes, o que é possível dizer sobre as listas $(n_1, \ldots, n_l)$, $(v_1, \ldots, v_l)$ e $(m_1, \ldots, m_t)$, $(u_1, \ldots, u_t)$?

(ii) Quais são as identidades polinomiais graduadas das $\mathbb{Z}$-graduações E^{k^*}, E^{∞} e E^k sobre corpos finitos?

(iii) O que acontece com as $\mathbb{Z}$-graduações de E que não são de cobertura finita? Por exemplo, podemos definir a $\mathbb{Z}$-graduação em E pelo índice, isto é:

$$\|e_i\| = i,$$

para $i \in \mathbb{N}$. Esta $\mathbb{Z}$-graduação tem uma combinatória bem interessante visto que, se $n > 0$, uma base de monômios da componente homogênea de grau n está em bijeção com o número de partições (sem parcelas repetidas) do número natural n. Nesse contexto, quais são as identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas de E quando munida por esta graduação?

(iv) Quais as identidades polinomiais graduadas para o produto tensorial de uma $\mathbb{Z}$-graduação em E por uma $\mathbb{Z}_2$-graduação em E? Por exemplo, quais as identidades polinomiais graduadas para $E^{can} \otimes E_{can}$?

Todas essas questões nos despertam interesse e, em estudos posteriores, pretendemos abordá-las.

Bibliografia

[1] Anisimov, N. *Involution codimensions of Grassmann algebra*, Bull. Math. 56, Moscow University, 25–29, (2001).

[2] Anisimov, N. *$\mathbb{Z}_p$-codimensions of $\mathbb{Z}_p$-identities of Grassmann algebra*, Comm. Algebra 29(9), 4211–4230, (2001).

[3] Anisimov, N. *Linearization method of computing $\mathbb{Z}_2$-codimensions of identities of the Grassmann algebra*, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, 119899, Moscow, Russia.

[4] Azevedo, S. S. *Graded identities for the matrix algebra of order n over an infinite field*, Commun. Algebra, 30 (12), 5849–5860, (2002).

[5] Azevedo, S. S. *A basis for $\mathbb{Z}$-graded identities of matrices over infinite fields*, Serdica Math. J., 29, 149–158, (2003).

[6] Bahturin, Yu. A; Sehgal, S. K. *Group Gradings on Associative Algebras*, Journal of Algebra 241, 677–698, (2001).

[7] Bahturin, Yu. A; Zaicev, M. V. *Group Gradings on Matrix Algebras*, Canad. Math. Bull 45, 499–508, (2002).

[8] Berezin, F. A. *Introduction to superanalysis*, D. Reidel Publishing Company, 1987.

[9] Centrone, L. *Polynomial identities of some minimal varieties with low PI-expoent*, tese de doutorado, Università di Bari, Bari, Italia, 2011.

[10] Centrone, L. *$\mathbb{Z}_2$-graded identities of the Grassmann algebra in positive characteristic*, Linear Algebra Appl. 435, 3297–3313, (2011).

[11] Centrone, L. *The G-graded identities of the Grassmann Algebra*, Archivum Mathematicum. 52, 141–158, (2016).

[12] Di Vincenzo, O. M.; da Silva, V. R. T. *On $\mathbb{Z}_2$-graded polynomial identities of the Grassmann algebra*, Linear Algebra Appl. 431, 56–72, (2009).

[13] Di Vincenzo, O. M.; Koshlukov, P.; da Silva, V. R. T. *On $\mathbb{Z}_p$-Graded identities and cocharacters of the Grassmann algebra*, Commun. Algebra, 45, 343–356, (2016).

[14] Djokovic, D. V.*Derivations and automorphisms of exterior algebras*, Canad. J. Math 6, 1336–1344, (1978).

[15] Drensky, V. *A minimal basis for identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*, Algebra Logic 20, 188–194, (1981).

[16] Drensky, V. *Free algebras and PI-algebras*, Springer-Verlag, Singapore, 1999.

[17] Dubnov, J.; Ivonov, V. *Sur l'abaissement du degrè des polynômes en affiners*, C.R. (Doklary) Acad. Sci. USSR 41, 96–98, (1943).

[18] Freitas, J. A. O; Koshlukov, P.; Krasilnikov, A. *$\mathbb{Z}$-graded identities for the Lie algebra W_1*, J. Algebra 427 (1), 226–251, (2015).

[19] Giambruno, A.; Koshlukov, P. *On the identities of the Grassmann algebras in characteristic $p > 0$*, Israel J. Math. 122, 305–316, (2001).

[20] Giambruno, A.; Zaicev, M. *Polynomial identities and asymptotic methods*, Math. Surveys Monographs 122, AMS, Providence, RI, 2005.

[21] Giambruno, A.; Mishchenko, S.; Zaicev, M. *Group actions and asymptotic behavior of graded polynomial identities*, J. London Math. Soc. 66, 259–312, (2002).

[22] Gonçalves, L. F. 2-*graded identities of the Grassmann algebra over a finite field*, Internat. J. Algebra Comput. 28, 1–17, (2018).

[23] Herstein, I. N. *Noncommutative rings*, The Carus Math. Monographs 15, 1973.

[24] Herstein, I. N. *Topics in algebra*, John Wiley and Soons, 2nd edition, Wiley, 1975.

[25] Hoffman, K.; Kunze, R. *Linear Algebra*, Prentice Hall, 2nd edition, 1971.

[26] Jacobson, N. *Structure theory of algebric algebras of bounded degree*, Ann. Math. 46, 695–707, (1945).

[27] Kaplansky, I. *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. 54, 575–580, (1948).

[28] Kemer, A. R. *Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras*, Math. USSR Izv. 25, 359–374, (1958).

[29] Kemer, A. R. *Finite basis property of identities of associative algebras*, Algebra and Logic 26, 362–397, (1987).

[30] Koshlukov, P. *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic* $\neq 2$, J. Algebra 241, 410–434, (2001).

[31] Koshlukov, P. *Graded polynomial identities for the Lie algebra $sl_2(K)$*, Internat. J. Algebra Comput. 18, 825–836, (2008).

[32] Krakowski, D.; Regev, A. *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. 181, 429–438, (1973).

[33] Lam, T. Y. *A First Course in Noncommutative Rings*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2001.

[34] Levitzki, J. *On a problem of A. Kurosch*, Bull. Amer. Math. Soc. 52, 1033–1035, (1946).

[35] Makar-Limanov, L. *On Grassmann Algebras of Graphs*, Journal of Algebra 87, 283–289, (1984).

[36] Polin, S.V. *Identities of an algebra of triangular matrices*, Sibirsk. Mat. Zh.21, 206–215, (1980).

[37] Popov, A. *Identities of tensor square of a Grassmann algebra*, Algebra Logic 21, 296–316, (1982).

[38] Razmyslov, Yu. P. *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*, Algebra Logic 12, 47–63, (1973).

[39] A. Regev, *Grassmann algebras over finite fields*, Commun. Algebra 19 (6), 1829–1849, (1991).

[40] da Silva, V. R. T. *Codimensões, Cocaracteres, Identidades e Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-Graduados da Álgebra de Grassmann*, tese de doutorado, UFMG, Belo Horizonte, 2008.

[41] da Silva, V. R. T. *$\mathbb{Z}_2$-codimensions of the Grassmann Algebra*, Commun. Algebra. 37, 3342–3359, (2009).

[42] Valenti, A.; Zaicev, M. *Abelian gradings on upper-triangular matrices*, Arch. Math. 80, 12–17, (2003).

[43] Valenti, A.; Zaicev, M. *Group gradings on upper triangular matrices*, Arch. Math. 89, 33–40, (2007).

[44] Valenti, A.; Zaicev, M. *Abelian Gradings on Upper Block Triangular Matrices*, Canad. Math. Bull, 55, 208–213, (2011).

[45] Vasilovsky, S. Yu. *$\mathbb{Z}$-Graded Polynomial Identities of the Full Matrix Algebra*, Comm. in Algebra 26 (2), 601–612, (1998).

[46] Vasilovsky, S. Yu. *$\mathbb{Z}_n$-graded polynomial identities of the full matrix algebra of order n*, Proc. Amer. Math. Soc 127, 3517–3524, (1999).