Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Variedades de PI-Expoente 2

Luís Felipe Gonçalves Fonseca

Belo Horizonte, 19 de fevereiro de 2010

Luís Felipe Gonçalves Fonseca

Variedades de PI-Expoente 2

Dissertação apresentada ao corpo docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Ana Cristina Vieira

Belo Horizonte
2010

Resumo

O principal objetivo dessa dissertação é o estudo de resultados sobre o PI-expoente de uma PI-álgebra sobre um corpo de característica zero.

O Teorema do PI-Expoente de Giambruno e Zaicev responderá a conjectura de Amitsur sobre a existência do PI-expoente. Apresentaremos uma técnica para calcular o PI-expoente em alguns casos. O Teorema do PI-Expoente de Kemer caracterizará as variedades de PI-expoente menor ou igual a um e o Teorema Fundamental de Giambruno e Zaicev caracterizará as variedades de PI-expoente maior que dois. Estes dois teoremas caracterizarão as variedades de PI-expoente dois.

Abstract

The main goal of this work is the study of PI-exponent's results of a PI-algebra over a field of characteristic zero.

The Giambruno-Zaicev'Theorem of PI-Exponent is going to ask the Amitsur's Conjecture about the existence of the PI-exponent. We are going to bring up a method to calculate the PI-exponent in some cases. The Kemer's Theorem of PI-Exponent is going to characterize the varieties of PI-exponent less or equals one and The Giambruno-Zaicev' Fundamental Theorem is going to characterize the varieties of PI-exponent greater than two. These two theorems will be characterize the varieties of PI-exponent two.

Agradecimentos

O mestrado foi um período de bastante perseverança. Foram muitos desafios e dificuldades, mas contei com a ajuda de pessoas escolhidas por Deus na minha caminhada.

Primeiramente, agradeço aos meus pais José Maria da Fonseca e Aparecida Gonçalves da Silva. A paciência, o carinho e o apoio psicológico deles foram fundamentais para que eu alcançasse mais este objetivo.

Aos meus irmãos José Lucas da Fonseca Citrin e Bárbara Gonçalves Fonseca que me iluminaram durante esta jornada.

À minha querida namorada Aline Cristina Rodrigues pelo apoio incondicional.

Aos meus amigos Júlio e Samuel.

À minha orientadora Ana Cristina Vieira pela sua paciência e presteza durante este período.

Às minhas colegas de seminário Mariana Garabini Cornelissen Hoyos, Sandra Mara Alves Jorge, Viviane Ribeiro Tomaz da Silva e Tatiana Aparecida Gouveia pelos importantes comentários durante a minha dissertação.

À professora Irina Sviridova pelos importantes comentários feitos na minha defesa de mestrado.

Aos meus colegas da álgebra Danielle Franco Nicolau, Neila Mara Gomes e Roney Rachide Nunes pela troca de conhecimentos obtidos durante os cursos de álgebra comutativa e geometria algébrica.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Sumário

Introdução

A álgebra é um dos ramos mais ativos da pesquisa matemática. A teoria dos anéis é uma subárea da álgebra que começou a ser desenvolvida no século XIX e atualmente é objeto de pesquisa de muitos matemáticos. Um dos ramos dessa teoria é a PI-teoria e esta tem sido enormemente estudada nos últimos sessenta anos, produzindo muitos resultados interessantes.

Os países do leste europeu e a Itália estão na vanguarda neste ramo de pesquisa. No Brasil, existem três instituições que se aplicam na formação de doutores neste assunto. Na Universidade Estadual de Campinas, a PI-teoria é estudada principalmente em corpos de característica prima. Na Universidade Federal de Minas Gerais, a PI-teoria é estudada em corpos de característica zero. Na Universidade Nacional de Brasília, a PI-teoria é aplicada para o estudo da propriedade de Specht de T-ideais.

Neste texto, o símbolo F denotará um corpo. A menos de menção ao contrário, todos os corpos são de característica zero. As F-álgebras são sempre associativas. Além disso, as F-álgebras e os anéis não são necessariamente unitários.

Consideremos $F\langle X\rangle$ a álgebra livre unitária gerada por X, onde $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ é um conjunto enumerável de variáveis não comutativas. Dizemos que uma F-álgebra A é uma PI-álgebra se existe um polinômio não nulo $f(x_1, \ldots, x_n)$ pertencente a $F\langle X\rangle$ tal que para qualquer sequência de elementos $(a_1, \ldots, a_n)$ cujas entradas são elementos de A vale:

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

O polinômio f é dito uma identidade da F-álgebra A.

Uma F-álgebra comutativa é uma PI-álgebra já que esta satisfaz o comutador duplo $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$, onde $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$. Definimos o comutador de peso maior ou igual a 3 como:

$$[x_1, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n], \quad n \geq 3.$$

Outro exemplo de uma PI-álgebra é $M_2(F)$, a álgebra de matrizes 2×2 com entradas em F. Esta álgebra satisfaz o polinômio:

$$[[x_1, x_2]^2, x_3].$$

Em geral, as álgebras de dimensão finita são PI-álgebras. Um importante exemplo de PI-álgebra de dimensão infinita é a álgebra de Grassmann unitária $\mathcal{G}$. Podemos descrevê-la como:

$$\mathcal{G} = \langle 1, e_1, e_2, \ldots \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle.$$

Além disso, temos que $\mathcal{G}$ pode ser escrita como a soma direta dos seguintes subespaços vetoriais.

- $\mathcal{G}^{(0)} = span_F\{e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_{2k}}; 1 \leq i_1 < \ldots < i_{2k}, k \geq 0\}$.
- $\mathcal{G}^{(1)} = span_F\{e_{j_1} \cdot \ldots \cdot e_{j_{2p+1}}; 1 \leq j_1 < \ldots < j_{2p+1}, p \geq 0\}$.

Com esta decomposição, não é difícil ver que $\mathcal{G}$ satisfaz o polinômio:

$$[x_1, x_2, x_3].$$

Até meados da década de 1940, a PI-teoria se restringia a questões geométricas. O divisor de águas ocorreu em 1948 com o célebre Teorema de Kaplansky[Kaplansky] que essencialmente afirma o seguinte: qualquer PI-álgebra primitiva é uma álgebra simples de dimensão finita.

Em 1950, Amitsur e Levitzki[Ami-Lev] provaram que a álgebra $M_n(F)$, a álgebra de matrizes $n \times n$ com entradas em F, satisfaz o polinômio standard de grau $2n$, dado por:

$$f(x_1, \ldots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} sgn(\sigma) x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(2n)},$$

onde S_{2n} denota o grupo simétrico de grau $2n$.

Um objeto importante na PI-teoria é o conjunto $Id(A)$ de todas as identidades de uma F-álgebra A. O conjunto $Id(A)$ é um ideal que é invariante por todos os endomorfismos de $F\langle X \rangle$. Um ideal com essa propriedade é chamado de um T-ideal. Se $Id(A)$ possui uma base finita dizemos que A tem a propriedade da base finita. Pode-se mostrar que o conjunto $Id(A)$ é gerado por polinômios multilineares no caso em que A é uma álgebra sobre um corpo F de característica zero.

Specht conjecturou em 1950 que todo T-ideal de uma F-álgebra associativa é finitamente gerado como T-ideal sobre um corpo de característica zero. Somente em 1987, Kemer[Kemer3] conseguiu provar a conjectura de Specht. Contudo o problema de como determinar uma base para um T-ideal não foi respondida e ainda é fruto de pesquisa nos dias atuais. Só para se ter uma idéia da dificuldade desse problema, até o presente momento conhecemos uma base de $Id(M_2(F))$, mas desconhecemos para $Id(M_k(F))$ no caso em que $k \geq 3$.

Em 1972, Regev[Regev] introduziu o conceito de sequência de codimensões de uma F-álgebra A. O n-ésimo elemento dessa sequência é definido abaixo:

$$c_n(A) = dim_F \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)},$$

onde P_n denota o conjunto de todos os polinômios multilineares de grau n.

A sequência de codimensões foi uma alternativa usada por Regev para responder a conjectura de Specht para alguns casos. Muitos são os resultados provados a respeito da sequência de codimensões de importantes PI-álgebras. Os matemáticos Krakowski e Regev[Kra-Reg] provaram que

$$c_n(\mathcal{G}) = 2^{n-1}.$$

Malcev[Malcev] mostrou que a n-ésima codimensão de $UT_2(F)$, das matrizes triangulares superiores 2×2 com entradas em um corpo F, é igual a:

$$c_n(UT_2(F)) = 2^{n-1}(n-2) + 2.$$

Além disso, observamos que se A é uma álgebra nilpotente então $x_1 \dots x_N$ é uma identidade polinomial de A para algum $N \in \mathbb{N} - \{0\}$. Assim $c_n(A) = 0, \ \forall \ n \geq N$.

Ainda em 1972, Regev provou que o produto tensorial de duas PI-álgebras é uma PI-álgebra e atribuiu uma cota superior para a sequência de codimensões de uma PI-álgebra, provando que se A é uma álgebra que satisfaz uma identidade de grau $d \geq 1$ então:

$$c_n(A) \leq (d-1)^{2n}.$$

Esse último resultado é denominado neste texto como Teorema das Codimensões de Regev, ou simplesmente o Teorema de Regev.

Um assunto que despertou o interesse dos PI-teoristas na década de 1980 foi o estudo do PI-expoente de uma PI-álgebra. Observando o Teorema de Regev, podemos afirmar que, quando A é uma PI-álgebra, a sequência:

$$\{\sqrt[n]{c_n(A)}\}_{n\geq 1}$$

é limitada inferiormente e superiormente, pois:

$$0 \leq c_n(A) \leq a^n,$$

para alguma constante a.

Posto isso, definimos:

$$\overline{exp}(A) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)} \text{ e } \underline{exp}(A) = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}.$$

Caso $\overline{exp}(A) = \underline{exp}(A)$, temos que $\{\sqrt[n]{c_n(A)}\}_{n\geq 1}$ possui limite e definimos o PI-expoente de A por:

$$exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}.$$

Notamos que se A é nilpotente então $exp(A) = 0$. Se $\mathcal{V} = var(A)$ é a variedade de uma álgebra A, isto é, $\mathcal{V}$ é a classe das álgebras que satisfazem todas as identidades de A, então definimos o PI-expoente de $\mathcal{V}$ como

$$exp(\mathcal{V}) = exp(A).$$

Na década de 1980, Amitsur conjecturou que o PI-expoente de uma PI-álgebra A existia e era um número inteiro não negativo. Apenas em 1999, Giambruno e Zaicev([Gia-Zai1] e [Gia-Zai2]) provaram a conjectura de Amitsur para o caso em que F é um corpo de característica zero.

As variedades de PI-expoente menor ou igual a 1 foram caracterizadas por Kemer[Kemer2] em 1979. Ele mostrou que se $\mathcal{V}$ é uma variedade de álgebras sobre um corpo F de característica zero então $exp(\mathcal{V}) \leq 1$ se, e somente se, $\mathcal{G}, UT_2(F) \notin \mathcal{V}$.

Em 2000, Giambruno e Zaicev[Gia-Zai3] caracterizaram as variedades de PI-expoente 2. Eles mostraram que se $\mathcal{V}$ é uma variedade em um corpo de característica zero então $exp(\mathcal{V}) = 2$ se, e somente se, $\mathcal{G}$ ou $UT_2(F)$ pertence a $\mathcal{V}$ e $A_1, \ldots, A_5$ não pertencem a $\mathcal{V}$, onde as álgebras $A_i, 1 \leq i \leq 5$, são:

$A_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{G} & \mathcal{G} \\ 0 & \mathcal{G}^{(0)} \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{G}^{(0)} & \mathcal{G} \\ 0 & \mathcal{G} \end{pmatrix}$; $A_3 = UT_3(F)$; $A_4 = M_2(F)$ e $A_5 = \begin{pmatrix} \mathcal{G}^{(0)} & \mathcal{G}^{(1)} \\ \mathcal{G}^{(1)} & \mathcal{G}^{(0)} \end{pmatrix}$.

Neste trabalho, o nosso principal objetivo será caracterizar as variedades de PI-expoente 2, ou seja, provar o principal resultado de [Gia-Zai3].

Para o bom entendimento deste texto, o leitor precisa de um curso básico de álgebra linear, noções de teoria dos anéis e teoria de grupos, em especial, alguns resultados básicos a respeito dos grupos simétricos.

No primeiro capítulo, iremos fazer uma apresentação sucinta sobre módulos e álgebras. O leitor que tem conhecimento sobre estas estruturas algébricas pode se ocupar do estudo da definição de radical de Jacobson, da Proposição 1.10, das álgebras de polinômios em variáveis não comutativas, da álgebra de Grassmann e dos dois teoremas de Wedderburn.

O segundo capítulo é essencial. Nele apresentaremos as PI-álgebras importantes para este trabalho, a definição e os resultados importantes sobre T-ideais. Depois, discorremos sobre variedade de álgebras com o importante teorema de Kemer que classifica as álgebras verbalmente primas e as sequências de codimensões.

No terceiro capítulo, definiremos o conceito de superálgebras e apresentaremos o Teorema da Envolvente de Grassmann e o Teorema de Classificação que serão importantes para a caracterização das variedades de PI-expoente 2.

O último capítulo é o principal. Nele iremos definir o PI-expoente de uma PI-álgebra e apresentar o Teorema do PI-Expoente de Giambruno e Zaicev. Logo após, provaremos o Teorema do PI-Expoente de Kemer e o Teorema Fundamental, os quais serão os ingredientes fundamentais para a caracterização das variedades de PI-expoente 2.

Terminamos o trabalho fazendo alguns comentários extras a respeito de variedades minimais de PI-expoente maior que 2.

Capítulo 1

Definições e Resultados Básicos

1.1 R-Módulos e anuladores

Nesta seção, faremos uma apresentação sucinta de R-módulos e anuladores, onde R é um anel. O nosso principal objetivo é definir o radical de Jacobson de R e calculá-lo na situação em que R é um anel artiniano unitário.

Para este fim, assumiremos que, se I é um ideal próprio à esquerda de um anel unitário S então existe um ideal maximal à esquerda H de S tal que $H \supset I$. Este resultado é uma consequência do Lema de Zorn o qual pode ser encontrado em [**Halmos**].

Por fim, falaremos brevemente do produto tensorial de F-módulos, onde F é um corpo.

Definição 1.1. *Seja R um anel. Um R-módulo à esquerda M é um grupo abeliano sobre o qual R age linearmente, ou seja, existe uma função $R \times M \to M$(a imagem de (r, a) é denotada por ra) tal que para todos $r, s \in R$ e $a, b \in M$ valem as seguintes propriedades:*

- $r(a + b) = ra + rb$;
- $(r + s)a = ra + sa$;
- $r(sa) = (rs)a$;

Analogamente, podemos definir R-módulos à direita. Usaremos a expressão R-módulos para nos referirmos a um R-módulo à esquerda.

Um R-submódulo N de um R-módulo M é um subgrupo que é fechado sob a ação dos elementos de R.

É claro que um anel R é um R-módulo e neste caso seus R-submódulos são seus ideais à esquerda.

Definição 1.2. *Sejam M e N dois R-módulos. Um R-homomorfismo $\phi : M \to N$ é uma aplicação tal que, para quaisquer m_1, $m_2 \in M$ e $r \in R$, valem as seguintes propriedades:*

- $\phi(m_1 + m_2) = \phi(m_1) + \phi(m_2)$,
- $\phi(rm) = r\phi(m)$.

Em relação à definição anterior, definimos os seguintes conjuntos:

$$Ker(\phi) = \{a \in M | \phi(a) = 0\} \text{ e } Im(\phi) = \{\phi(a) | a \in M\}.$$

Não é difícil ver que $Ker(\phi)$ e $Im(\phi)$ são R-submódulos de M e N respectivamente. Além disso, ϕ é injetivo se, e só se, $Ker(\phi) = \{0\}$.

Dizemos que dois R-módulos M e N são isomorfos(denotamos por $M \cong N$) se existir um R-homomorfismo $\theta : M \to N$ que é uma bijeção.

Definição 1.3. *Seja M um R-módulo, definimos o seu anulador como:*

$$ann(M) = \{r \in R | rm = 0 \ \forall m \in M\}.$$

Notemos que $ann(M)$ é um ideal bilateral de R.

Exemplo 1.4. *Consideremos o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_m$. É fácil ver que:*

$$ann(\mathbb{Z}_m) = \langle m \rangle,$$

onde $\langle m \rangle$ denota os múltiplos de m.

Um R-módulo M é simples se $M \neq 0$ e seus únicos R-submódulos são $\{0\}$ e M. Denotando por $\mathcal{M}$ o conjunto dos R-módulos simples, temos a seguinte definição.

Definição 1.5. *O radical de Jacobson de um anel R,o qual denotamos por $J(R)$, é o conjunto dos elementos $r \in R$ tais que $r \in ann(M)$ para todo $M \in \mathcal{M}$. Ou seja:*

$$J(R) = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} ann(M).$$

Observe que $J(R)$ é um ideal bilateral de R. Além disso, para anéis unitários temos sempre que $J(R) \neq R$.

Os anéis artinianos merecem destaque nesta dissertação.

Definição 1.6. *Um anel R é dito artiniano se qualquer cadeia descendente de ideais à esquerda de R:*

$$I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_k \supset \ldots$$

estabiliza, isto é, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $I_{k_0} = I_{k_j}, \ \forall k_j \geq k_0$.

Na próxima proposição, veremos uma maneira de garantir que um anel é artiniano.

Proposição 1.7. *As seguintes afirmações abaixo são equivalentes:*

- ***1:*** *R é artiniano.*
- ***2:*** *Qualquer conjunto $\{I_j\}_{j\in J}$ não vazio de ideais à esquerda de R possui um elemento minimal.*

Demonstração: Seja R um anel artiniano e $\mathcal{P} = \{I_j\}_{j\in J}$ um conjunto não vazio de ideais à esquerda de R. Fixe $I_1 \in \mathcal{P}$. Se I_1 é minimal, não há nada para mostrar. Caso contrário, existe um ideal à esquerda $I_2 \in \mathcal{P}$ tal que $I_1 \supsetneq I_2$. Procedendo indutivamente, obtemos um cadeia descendente:

$$I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq \ldots \supsetneq I_k.$$

Após um número finito de passos, obtemos necessariamente um ideal à esquerda minimal I_{k_0}, senão produziríamos uma cadeia descendente que não se estabilizaria. Assim, R satisfaz a propriedade **2**.

Inversamente, suponha que R satisfaça a propriedade **2** e seja:

$$I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_k \supset \ldots$$

uma cadeia descendente de ideais à esquerda de R. A família $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}-\{0\}}$ possui um elemento minimal I_{k_0}. Mas então $I_{k_0} = I_{k_0+1} = \ldots$ e portanto R é artiniano.

□

Definição 1.8. *Seja I um ideal bilateral de um anel R. O ideal I é dito nilpotente se existe $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que, para quaisquer $a_1, \ldots, a_m \in I$, tem-se $a_1 \ldots a_m = 0$. O menor natural m nestas condições, chama-se expoente de I.*

Lema 1.9. *Sejam R um anel unitário e $J(R)$ o seu radical de Jacobson. Se $b \in J(R)$ então $R(1-b) = R$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{R}$ a coleção de todos os ideais maximais à esquerda de R. Se $I \in \mathcal{R}$, temos que R/I é um R-módulo simples e $ann(R/I) \subset I$. Deste modo, se $b \in J(R)$ temos:

$$b \in \bigcap_{L\in\mathcal{R}} L.$$

Notemos que $R(1-b)$ é um ideal à esquerda de R. Se $R(1-b)$ estivesse contido estritamente em R, existiria pelo Lema de Zorn um ideal maximal à esquerda T tal que $R(1-b) \subset T$. Como R é unitário isto acarreta que $1-b \in T$. Absurdo, pois $b \in J(R) \subset T$ e $1 \notin T$. □

A próxima proposição nos permitirá caracterizar o radical de Jacobson de um anel artiniano.

Proposição 1.10. *Se I é um ideal nilpotente do anel unitário R então $I \subset J(R)$. Se R é artiniano então $J(R)$ é nilpotente e assim é o maior ideal nilpotente de R.*

Demonstração: Provaremos a primeira destas afirmações. Seja I um ideal nilpotente. Pela definição anterior, existe $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que $I^m = \{0\}$. É suficiente provar que $IM = \{0\}$ para todo $M \in \mathcal{M}$. Suponhamos que $IN \neq \{0\}$ para algum R-módulo simples N. Notemos que IN é um subgrupo de N fechado sob a ação de R. Pela simplicidade de N, temos que $IN = N$ e portanto $I^2N = IN = N$. Indutivamente, temos que $I^pN = N \ \ \forall p \in \mathbb{N} - \{0\}$. Assim $N = I^mN = 0$, o que é um absurdo. Isso garante que $I \subset J(R)$.

A segunda afirmação exige mais trabalho. Por simplicidade substituiremos $J(R)$ por J. Como R é artiniano, a cadeia abaixo estabiliza:

$$J \supset J^2 \supset \ldots \supset J^m \supset J^{m+1} \supset \ldots \ .$$

Desta forma, existe $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que $J^n = J^{n+1} = \ldots$.

Se $J^n = \{0\}$, concluímos que J é nilpotente e a segunda afirmação está provada. Suponhamos por absurdo que $J^n \neq \{0\}$ e considere a seguinte família de ideais à esquerda, onde $A = J^n$:

$$\mathcal{J} = \{L | L \text{ é ideal à esquerda de } R \text{ e } AL \neq \{0\}\}.$$

A cadeia $\mathcal{J}$ é não vazia já que $J \in \mathcal{J}$. Pela Proposição 1.10, existe um elemento minimal em $\mathcal{J}$. Denominemos este elemento por Z. Sabemos que existe um elemento $x \in Z$ tal que $Ax \neq \{0\}$.

Observemos $Ax \subset Z$ e Ax é um ideal à esquerda pertencente a $\mathcal{J}$. Pela minimalidade de Z, temos que $Ax = Z$. Isto significa que existe $b \in A$ tal que:

$$bx = x.$$

Ou seja $(1 - b)x = 0$. Provaremos que $(1 - b)$ é invertível à esquerda, assim $x = 0$ e consequentemente $Z = \{0\}$. Este absurdo mostrará que $J^n = \{0\}$.

Pelo Lema 1.9, temos que $R(1-b) = R$. Assim, existe $y \in R$ tal que $y(1-b) = 1$, o que mostra que $(1 - b)$ é invertível à esquerda e o resultado está provado. □

A próxima observação é bastante importante no contexto da Seção 1.3.

Observação 1.11. *Se A é uma F-álgebra unitária de dimensão finita então $J(A)$ é o maior ideal nilpotente A.*

Exemplo 1.12. *Considere o anel $R = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ onde p é primo. Então, todos os ideais próprios não nulos de R têm a forma p^iR, onde $1 \leq i \leq n - 1$. Todos estes são nilpotentes e pR é o maior deles. Assim, $J(R) = pR$.*

1.2 Produto tensorial de F-módulos

Nesta seção faremos uma apresentação bastante rápida sobre o produto tensorial de F-módulos que servirá unicamente para a construção do produto tensorial de F-álgebras na última seção deste capítulo. O leitor interessado pode consultar maiores informações no livro [Ati-Mac].

Definição 1.13. *Sejam $M_1, \ldots, M_r$, N F-módulos. Uma aplicação F-multilinear é uma aplicação $\mu : M_1 \times \ldots \times M_r \to N$ que é linear em cada variável, ou seja:*

$$\mu(v_1, \cdots, av_i' + bv_i'', \cdots, v_r) = a\mu(v_1, \cdots, v_i', \cdots, v_r) + b\mu(v_1, \cdots, v_i'', \cdots, v_r),$$

para quaisquer $v_1 \in M_1, \ldots, v_i' \in M_i, v_i'' \in M_i, \ldots, v_r \in M_r$ e $a, b \in F$.

Proposição 1.14. *Sejam $M_1, \ldots, M_r$ F-módulos. Então existe um par (T, g) consistindo de um F-módulo T(o qual denotamos por $M_1 \otimes \ldots \otimes M_r$) e uma aplicação F-multilinear $g : M_1 \times \ldots \times M_r \to T$ com as seguintes propriedades:*

- ***Existência.*** *Para todo o F-módulo P e aplicação F-multilinear $f : M_1 \times \ldots \times M_r \to P$, existe uma única F-aplicação linear $f' : P \to T$ tal que $f = f'(g)$.*
- ***Unicidade.*** *Além disso, se (T_1, g_1) e (T_2, g_2) são dois pares com esta propriedade então existe um isomorfismo de espaços vetoriais $j : T_1 \to T_2$ tal que $j(g_1) = g_2$.*

Demonstração:

- **Existência.** Seja L o espaço vetorial formado pelas combinações lineares do conjunto $M_1 \times \ldots \times M_r$. Seja A o subespaço de L gerado pelos elementos da forma

  $$(v_1, \cdots, av_i' + bv_i'', \cdots, v_r) - a(v_1, \cdots, v_i', \cdots, v_r) - b(v_1, \cdots, v_i'', \cdots, v_r). \quad (1.1)$$

  Denotamos o espaço vetorial quociente L/A por T.

  Posto isso, definimos a aplicação F-multilinear $g : M_1 \times \ldots \times M_r \to T$ por:

  $$g(a_1, \ldots, a_r) = a_1 \otimes \ldots \otimes a_r,$$

  onde $a_1 \otimes \ldots \otimes a_r$ corresponde ao termo $(a_1, \ldots, a_r) + A$.

  Como $f : M_1 \times \ldots \times M_r \to P$ é F-multilinear, obtemos uma aplicação induzida $\gamma : L \to P$ da seguinte forma: se $\oplus_{i \in I} a_i(v_1, \ldots, v_r) \in L$ então

  $$\gamma(\oplus_{i \in I} a_i(v_1, \ldots, v_r)) = \sum_{i \in I} a_i f(v_1, \ldots, v_r).$$

  É fácil verificar que esta aplicação está bem definida, pois apenas um número finito dos a_i não é zero. Além disso, γ é F-linear. Como f é F-multilinear, γ

se anula em elementos da forma (1.1), logo em A. Por passagem ao quociente, obtemos então uma transformação F-linear $f' : T \to P$ onde:

$$f'(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) = \gamma(x_1, \ldots, x_m) \text{ e } f = f'(g).$$

Notemos que a aplicação f' é única já que uma aplicação linear fica completamente determinada pela sua imagem em um conjunto gerador.

- **Unicidade:** Suponhamos que existam dois pares (T_1, g_1) e (T_2, g_2) satisfazendo o item anterior. Por definição, existem aplicações F-lineares $f_1' : T_1 \to T_2$ e $f_2' : T_2 \to T_1$ tais que $g_2 = f_1'(g_1)$ e $g_1 = f_2'(g_2)$. Finalmente, notemos que $f_1'(f_2') = 1_{T_2}$ e $f_2'(f_1') = 1_{T_1}$, pois $f_1'(f_2'(g_2)) = g_2$ e $f_2'(f_1'(g_1)) = g_1$. Assim f_1' é um isomorfismo de espaços vetoriais. Como $g_2 = f_1'(g_1)$, definindo $j := f_1'$, concluímos a proposição.

□

Exemplo 1.15. *Sejam $m, n \geq 2$ tais que $mdc(m, n) = 1$. Afirmamos que*

$$\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n = 0.$$

Para verificar isto, considere $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$a_1 m + a_2 n = 1.$$

Dessa forma, segue que:

$$x \otimes y = 1(x \otimes y) = a_1 m x \otimes y + x \otimes a_2 n y = 0 \otimes y + x \otimes 0 = 0.$$

1.3 F-Álgebras

Os espaços vetoriais sobre um corpo F que têm estrutura de anel e que gozam de uma determinada propriedade adicional serão bastante importantes como veremos. Essas estruturas são conhecidos como F-álgebras (associativas), ou simplesmente, álgebras, caso o corpo F esteja subentendido.

O objetivo desta seção é apresentar as F-álgebras e introduzir a álgebra de Grassmann unitária. Além disso, vamos mostrar que se A é uma F-álgebra semi-simples unitária então o seu radical de Jacobson é o ideal nulo e vamos também enunciar o Teorema de Wedderburn-Malcev, que fornece uma interessante decomposição para álgebras de dimensão finita.

Definição 1.16. *Seja A um espaço vetorial sobre um corpo F.Dizemos que A é uma F-álgebra (associativa) se A é uma anel tal que para todos $a, b \in A$ e $\alpha \in F$ vale a seguinte propriedade:*

- $\alpha(a.b) = (\alpha a).b = a(\alpha b)$.

Se A é um anel comutativo, dizemos que A é uma F-álgebra comutativa. Caso A seja um anel unitário, dizemos que A é uma álgebra unitária.

A dimensão de uma F-álgebra é a sua dimensão como espaço vetorial. Dizemos que A é gerada como álgebra por um subconjunto S, se todo elemento de A pode ser escrito como combinação linear sobre F de produtos $s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ onde $s_{i_j} \in S$. Nesse caso, escrevemos $A = \langle S \rangle$.

Com base na seção anterior, temos que uma F-álgebra A é um anel que é um F-módulo com a multiplicação de anel compatível com a ação de F.

Exemplo 1.17.

- *A álgebra $M_n(F)$ das matrizes $n \times n$ com entradas em F é unitária e não comutativa. Além disso a sua dimensão é n^2.*

- *A álgebra $UT_n(F)$ das matrizes triangulares superiores $n \times n$ é uma álgebra unitária e não comutativa cuja a dimensão é: $\frac{n(n+1)}{2}$.*

- *Consideremos um conjunto infinito enumerável de variáveis não comutativas $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Denotamos por $F\langle X \rangle$ o espaço vetorial gerado por todas as sequências $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$, com $n \geq 0$, munido da multiplicação natural definida por justaposição. A sequência $n = 0$ denota a unidade $1 \in F\langle X \rangle$. $F\langle X \rangle$ é uma álgebra unitária de dimensão infinita.*

- *Considere um grupo G.*
  Um exemplo importante de F-álgebra é a chamada F-álgebra de grupo FG a qual é definida por:

$$FG := \left\{ \sum_{g \in G} r_g g \mid r_g \in F \ \text{ e } r_g \text{ é q.s.z.} \right\}.$$

O termo q.s.z significa que $r_g \neq 0$ apenas para um número finito de elementos de G.

As operações de FG são as seguintes:

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{g \in G} \beta_g g = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g,$$

$$(\sum_{g \in G} \alpha_g g)(\sum_{h \in G} \beta_h h) = \sum_{g,h \in G} \gamma_{gh} gh, \quad \gamma_{gh} = \alpha_g \beta_h,$$

se $\lambda \in F$ então:

$$\lambda(\sum_{g \in G} \alpha_g g) = \sum_{g \in G} \lambda \alpha_g g.$$

Claramente, a dimensão de FG é a ordem de G.

Em álgebra linear, um conceito importante é o de soma direta de espaços vetoriais de dimensão finita. Para facilitar o entendimento da próxima definição, recorderemos este conceito rapidamente.

Sejam W, um espaço vetorial de dimensão finita, e $W_1, \ldots$ e W_j subespaços de W tais que $W = W_1 + \ldots + W_j$. Dizemos que esta soma é direta se para cada $2 \leq k \leq j$ vale:

$$W_k \cap (W_1 \cup \ldots \cup W_{k-1}) = \{0\}.$$

Neste caso, escrevemos $W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_j$.

Definição 1.18. *Sejam $A_1, \ldots, A_m$ F-álgebras de dimensão finita, tais que para cada $2 \leq k \leq m$ vale:*

$$A_k \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_{k-1}) = \{0\}.$$

A soma direta de $A_1, \ldots, A_m$, a qual denotamos por $A_1 \odot \ldots \odot A_m$, é a soma direta destes espaços vetoriais com a seguinte operação de multiplicação:

$$(x_1 + \ldots + x_m)(y_1 + \ldots + y_m) = x_1y_1 + \ldots + x_my_m \ ; \ x_i \ , \ y_i \in A_i \ \forall \ i \in \{1, \ldots, m\}.$$

A seguir, destacamos alguns tipos especiais de F-álgebras:

Definição 1.19.

- *A é simples se $A^2 \neq 0$ e esta não possui ideais bilaterais próprios.*
- *A é semi-simples se esta pode ser escrita como a soma direta, não necessariamente finita, de álgebras simples.*
- *A é nilpotente se existe $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que para quaisquer $a_1, \ldots, a_n$ em A, tem-se $a_1 \cdots a_n = 0$. O menor natural positivo n com esta propriedade é chamado de expoente de A.*
- *A é nil de grau limitado se existe $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que $a^p = 0$ para todo $a \in A$. O menor natural positivo p com essa propriedade é chamado expoente de A.*

Claramente toda álgebra nilpotente é não unitária e toda álgebra simples é semi-simples.

Para fixar as idéias, avaliaremos a álgebra $M_n(F)$. Como sabemos, $M_n(F)$ é uma álgebra unitária e não comutativa. Além disso, ela é simples; mas isto é menos óbvio. Verificaremos a simplicidade de $M_n(F)$ no próximo exemplo. Neste exemplo e daqui para frente, a matriz $E_{lm} = (f_{ij}) \in M_n(F)$ denota uma matriz elementar com a seguinte regra de formação:

$$f_{ij} = 1 \text{ caso } (i,j) = (l,m)$$

$$f_{ij} = 0 \text{ caso contrário.}$$

Exemplo 1.20. *Para verificar que $M_n(F)$ é uma álgebra simples, consideremos o conjunto $\widehat{n} = \{1, \ldots, n\}$ e um ideal bilateral J em $M_n(F)$. Sejam o conjunto $X = \{(i,j) \in \widehat{n} \times \widehat{n}\}$ e, para cada $(i,j) \in X$, o seguinte ideal bilateral de F:*

$$I_{i,j} = \{x \in F | \exists A \in J \text{ tal que } a_{ij} = x\}.$$

Como F é um corpo, só temos duas opções:

$$I_{i,j} = \{0\} \text{ ou } I_{i,j} = F.$$

Se $I_{i,j} = \{0\}$ para todo par $(i,j) \in X$ então $J = \{0\}$. Caso exista um par $(i_1, j_1) \in X$ tal que $I_{i_1,j_1} = F$, existe uma matriz $B \in J$ tal que $b_{i_1j_1} = 1$. Como J é um ideal bilateral, temos que $E_{i_1j_1} = E_{i_1i_1}BE_{j_1j_1}$ e $E_{kl} = E_{ki_1}E_{i_1j_1}E_{j_1l}$ são elementos de J. Como as matrizes elementares geram $M_n(F)$ como espaço vetorial, segue que $J = M_n(F)$.

Mais geralmente, se D é um anel de divisão, temos que $M_n(D)$ é álgebra simples.

Alguns subconjuntos de uma F-álgebra merecem destaque.

Definição 1.21. *Dizemos que B é uma F-subálgebra de A se B é um subanel e um F-submódulo de A. Dizemos que I é um ideal de A se I é um ideal de anel e um F-submódulo de A.*

Exemplo 1.22.

- *A álgebra $UT_n(F)$ é uma subálgebra de $M_n(F)$.*
- *Um exemplo de uma subálgebra de $UT_3(F)$ é o conjunto formado pelas matrizes do tipo:*
$$D = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d \in F \right\}.$$
- *Considere $E = \{f \in F\langle x \rangle | f(0) = 0\}$. O conjunto E é uma subálgebra de $F\langle x \rangle$.*

A seguir, definiremos o conceito de homomorfismo de F-álgebras.

Definição 1.23. *Uma aplicação $\Phi : A_1 \to A_2$ entre as F-álgebras A_1 e A_2 é um homomorfismo de F-álgebras se ϕ é uma F-aplicação linear e para quaisquer $a, b \in A_1$ vale a seguinte propriedade:*

- $\Phi(ab) = \Phi(a).\Phi(b)$.

Dizemos que Φ é um isomorfismo se esta for uma aplicação bijetora. Nesse caso, dizemos que A_1 e A_2 são isomorfas, ou simplesmente, $A_1 \cong A_2$. Um homomorfismo de A em A é chamado um endomorfismo. Um endomorfismo bijetor é chamado automorfismo. Denotamos os conjuntos de endomorfismos e automorfismos de A por $End(A)$ e $Aut(A)$, respectivamente.

Além disso Φ é injetora se, e somente se, $Ker(\Phi) = \{0\}$.

Seja $\Phi : A \to B$ um homomorfismo de F-álgebras.É fácil ver que $Ker(\Phi)$ é um ideal de A e $Im(\Phi)$ é uma F-subálgebra de B.Além disso, pode-se provar que

$$A/Ker(\phi) \cong Im(\phi).$$

Este resultado é conhecido como o Teorema do homomorfismo de álgebras.

Um outro exemplo de F-álgebra é a álgebra de Grassmann unitária.

Exemplo 1.24. *Seja $I \subset F\langle X\rangle$ o ideal de $F\langle X\rangle$ gerado por:*

$$span_F\{x_i x_j + x_j x_i : i, j \geq 1\}.$$

Para cada $i \in \mathbb{N} - \{0\}$, definimos $e_i = x_i + I$. Notemos que

$$e_i e_j = x_i x_j + I = -x_j x_i + I = -e_j e_i.$$

Definimos a F-álgebra de Grassmann $\mathcal{G}$ como a F-álgebra gerada por:

$$\{1, e_1, e_2, \ldots e_k, \ldots\}.$$

Ou seja:

$$\mathcal{G} = \langle 1, e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots | e_i e_j = -e_j e_i\rangle.$$

Desta forma, cada elemento da F-álgebra de Grassmann $\mathcal{G}$ é uma combinação linear de produtos da forma $e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_j}$, onde j é um número natural positivo, e 1, a unidade de $\mathcal{G}$. Se σ é uma permutação de S_n, onde S_n é o grupo simétrico de grau n, temos:

$$e_{\sigma(1)} e_{\sigma(2)} \cdots e_{\sigma(n)} = sgn(\sigma) e_1 \cdots e_n.$$

A álgebra de Grassmann fornece vários exemplos de subálgebras de dimensão finita. Para construí-las, restringimos o número de geradores a uma quantidade finita. Deste modo, para cada $k \geq 1$, temos a F-álgebra:

$$\mathcal{G}_k = \langle 1, e_1, e_2, \cdots, e_k | e_i e_j = -e_j e_i\rangle,$$

a qual tem dimensão $2^k - 1$.

Notemos que a F-álgebra de Grassmann é a soma direta dos seguintes espaços vetoriais:

$$\mathcal{G}^{(0)} = span_F\{e_{i_1} \ldots e_{i_{2k}}; 1 \leq i_1 < \ldots < i_{2k}, k \geq 0\};$$

$$\mathcal{G}^{(1)} = span_F\{e_{i_1} \ldots e_{i_{2p+1}}; 1 \leq i_1 < \ldots < i_{2p+1}, p \geq 0\}.$$

Esses subespaços vetoriais satisfazem as seguintes propriedades:

- $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)} \oplus \mathcal{G}^{(1)}$;
- $\mathcal{G}^{(0)}\mathcal{G}^{(0)} + \mathcal{G}^{(1)}\mathcal{G}^{(1)} \subset \mathcal{G}^{(0)}$ *(o que mostra que* $\mathcal{G}^{(0)}$ *é uma subálgebra e que* $\mathcal{G}^{(1)}$ *não é uma subálgebra);*
- $\mathcal{G}^{(0)}\mathcal{G}^{(1)} + \mathcal{G}^{(1)}\mathcal{G}^{(0)} \subset \mathcal{G}^{(1)}$.

Uma F*-álgebra* A *que possui dois* F*-subespaços vetoriais* $A^{(0)}$ *e* $A^{(1)}$ *que têm as propriedades listadas acima de* $\mathcal{G}^{(0)}$ *e* $\mathcal{G}^{(1)}$*, respectivamente, é o que chamamos de uma* F*-superálgebra. Veremos este conceito com mais detalhes no terceiro capítulo.*

Quando lidamos com álgebras semi-simples, o conhecido Teorema de Wedderburn-Artin é bastante útil. A principal consequência desse teorema é a possibilidade de decompor estas F-álgebras como a soma direta de álgebras de matrizes.

Teorema 1.25 (Teorema de Wedderburn-Artin)**.** *Se* A *é uma* F*-álgebra semi-simples de dimensão finita unitária então* A *é isomorfa a uma soma direta de um número finito de álgebras de matrizes com coeficientes sobre anéis de divisão, ou seja:*

$$A \cong \bigodot_{i=1}^{k} M_{n_i}(D_i),$$

onde cada D_i *é um anel de divisão de dimensão finita.*

Particularmente, se F *é um corpo algebricamente fechado então* $D_i \cong F\ \forall i$*, ou seja:*

$$A \cong \bigodot_{i=1}^{k} M_{n_i}(F).$$

Demonstração: Veja [Den-Far]. A demonstração original é para anéis semi-simples, mas pode ser generalizada sem dificuldades para álgebras semi-simples.

□

Lema 1.26. *Seja* A *uma* F*-álgebra tal que* $A = A_1 \odot A_2$ *onde* A_1 *e* A_2 *são duas* F*-álgebras. Então*

$$J(A) \cong J(A_1) \odot J(A_2).$$

Consequentemente, por uma indução simples, se $A = A_1 \odot \ldots \odot A_m$ *então:*

$$J(A) \cong J(A_1) \odot \ldots \odot J(A_m).$$

Demonstração: O nosso primeiro objetivo é verificar que todo elemento de $J(A)$ se escreve como uma soma de um elemento de $J(A_1)$ com um elemento de $J(A_2)$.

Seja a um elemento de $J(A)$. Como $A = A_1 \odot A_2$ temos que $a = a_1 + a_2$ onde $a_1 \in A_1$ e $a_2 \in A_2$. Se $a_1 \notin J(A_1)$ ou $a_2 \notin J(A_2)$ então podemos supor, sem perda de generalidade, que existe um A_1-módulo N simples tal que $a_1 N \neq 0$. Podemos estender N a um A-módulo simples $\overline{N}$ da seguinte maneira: para qualquer elemento $x \in A_2$ faremos $x\overline{N} = \{0\}$ e quando $x \in A_1$ faremos $x\overline{N} = xN$. Como $\overline{N}$ é um A-módulo simples, temos que $(a_1 + a_2)\overline{N} = 0$. Contudo, temos que $a_1 N = a_1\overline{N} \neq 0$ e $a_2\overline{N} = 0$. Esta contradição conclui a afirmação do parágrafo anterior.

Para quaisquer $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in J(A_1) \odot J(A_2)$ e $\lambda \in F$, temos as seguintes operações:

- $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$;
- $(a_1, a_2).(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$;
- $\lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2)$.

Consideremos a seguinte aplicação F-álgebras:

$$\begin{cases} \phi : J(A_1) \odot J(A_2) \to J(A) \\ (a_1, a_2) \mapsto a_1 + a_2 \end{cases}$$

Esta aplicação é claramente sobrejetiva. É uma aplicação linear e preserva a multiplicação a qual é compatível com a multiplicação por escalar. Assim ϕ é um homomorfismo de álgebras. Além disso, ϕ é injetiva já que $Ker(\phi) = \{0\}$.

Segue daí que $J(A) \cong J(A_1) \odot J(A_2)$. $\square$

Uma consequência importante deste lema é o seguinte teorema.

Teorema 1.27. *Se A é uma F-álgebra semi-simples unitária de dimensão finita então $J(A) = \{0\}$.*

Demonstração: Sabemos do Teorema de Wedderburn-Artin que:

$$A \cong \bigodot_{i=1}^{k} M_{n_i}(D_i).$$

Com isto, segue do lema anterior que:

$$J(A) \cong \bigodot_{i=1}^{k} J(M_{n_i}(D_i)).$$

Como $J(M_{n_i}(D_i)) = \{0\}$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, temos que $J(A) = \{0\}$. $\square$

O teorema de Wedderburn-Malcev terá um papel relevante nesta dissertação. Ele será usado na caracterização das variedades de PI-expoente 2.

Definição 1.28. *Dizemos que B é uma F-subálgebra maximal de A se para qualquer F-subálgebra A' tal que $B \subset A' \subset A$ implicar que $B = A'$ ou $A = A'$.*

Teorema 1.29 (Teorema de Wedderburn-Malcev)**.** *Sejam A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero e $J(A)$ o seu radical de Jacobson. Então existe uma subálgebra maximal semi-simples B tal que:*

$$A = B + J(A).$$

Demonstração: Veja [Cur-Rei]. □

Exemplo 1.30. *Veremos uma ilustração de como o teorema Wedderburn-Malcev funciona para o caso em que a F-álgebra de dimensão finita é a álgebra das matrizes triangulares superiores $UT_n(F)$.*

Seja $UT_n(F)^N$ o ideal formado pelas matrizes de $UT_n(F)$ com diagonal principal nula. Pela Observação 1.11,temos:

$$J(UT_n(F)) = UT_n(F)^N.$$

Para cada $i = 1, \ldots, n$ denote por $A_{ii} = \{aE_{ii} | a \in F\}$. Não é difícil ver que A_{ii} é uma F-subálgebra simples de $UT_n(F)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Além disso a F-álgebra semi-simples apresentada abaixo é maximal:

$$B = A_{11} \odot \ldots \odot A_{nn}.$$

Com isto temos a decomposição de Wedderburn-Malcev de $UT_n(F)$:

$$UT_n(F) = A_{11} \odot \ldots \odot A_{nn} + UT_n(F)^N.$$

1.4 Produto tensorial de F-álgebras

Nesta seção definiremos o produto tensorial de F-Álgebras que será necessário para o bom entendimento da primeira parte do Lema 4.11 e do conceito de envolvente de Grassmann de uma F-superálgebra. Para mais detalhes, o leitor interessado pode consultar [Ati-Mac].

Sejam $A_1, \ldots, A_m$ F-álgebras. Podemos considerar o produto tensorial dessas F-álgebras como F-módulos como foi feito na Seção 1.2. Podemos munir o F-módulo $A_1 \otimes \ldots \otimes A_m$ com estrutura de F-álgebra da seguinte maneira:

$$(a_1 \otimes \ldots \otimes a_m).(b_1 \otimes \ldots \otimes b_m) = (a_1 b_1 \otimes \ldots \otimes a_m b_m),$$

onde $a_1 \otimes \ldots \otimes a_m$ e $b_1 \otimes \ldots \otimes b_m$ são elementos de $A_1 \otimes \ldots \otimes A_m$.

Notemos que $1_{A_1} \otimes \ldots \otimes 1_{A_m}$ é a identidade dessa multiplicação, pois esta fixa todos os geradores $c_1 \otimes \ldots \otimes c_m$ de $A_1 \otimes \ldots \otimes A_m$. Podemos provar que esta multiplicação é associativa. Assim, temos que $A_1 \otimes \ldots \otimes A_m$ é um anel. Não é difícil verificar que a multiplicação do anel $A_1 \otimes \ldots \otimes A_m$ é compatível com a ação de F neste anel como F-módulo. Com isto, concluímos que $A_1 \otimes \ldots \otimes A_m$ é uma F-álgebra.

Observação 1.31. *Extensão do corpo de escalares*

Consideremos uma F-álgebra A e K uma extensão de F. Podemos ver A como uma K-álgebra usando o produto tensorial $A \otimes K$. De fato, sabemos que a F-álgebra A é descrita por uma base $\{a_i\}$ de A sobre F e pela maneira como multiplicamos os elementos dessa base, quer dizer:

$$a_i a_j = \sum_k b_{ijk} a_k \text{ onde } b_{ijk} \in F \subset K.$$

O elo entre as F-álgebras A e $A \otimes K$ é dado pelo conjunto $\{a_i\}$ discutido acima. Verificaremos que toda base de A sobre F é uma base de $A \otimes K$ sobre K.

Proposição 1.32. *Toda base de A sobre F é base de $A \otimes K$ como um K-módulo.*

Demonstração: Consideremos os seguintes homomorfismos de F-álgebras:

$$\begin{cases} i : K \to A \otimes K \\ f \mapsto 1 \otimes f \end{cases}$$

$$\begin{cases} j : A \to A \otimes K \\ a \mapsto a \otimes 1 \end{cases}$$

Estes homomorfismos nos mostram que as F-álgebras A e K estão isomorficamente imersas na F-álgebra $A \otimes K$. Se $\{e_\alpha\}$ é uma base para A então todo elemento $x \in A \otimes K$ tem uma única expressão

$$x = \sum e_\alpha \otimes r_\alpha = \sum (e_\alpha \otimes 1)(1 \otimes r_\alpha) = \sum j(e_\alpha) i(r_\alpha),$$

onde $r_\alpha \in K$. Desta maneira, podemos considerar $A \otimes K$ como um K-módulo via i e assim $\{j(e_\alpha)\}$ é uma base para ele. $\square$

Particularmente, se $K = \overline{F}$ é o fecho algébrico de F, podemos ver A como uma $\overline{F}$-álgebra, ou seja, A é uma álgebra sobre um corpo algebricamente fechado.

Capítulo 2

PI-Álgebras

As F-álgebras que satisfazem um polinômio não nulo de $F\langle X\rangle$ são importantes nesta dissertação. Estas F-álgebras são chamadas de PI-álgebras.

Dois conceitos fundamentais neste capítulo serão: T-ideais e variedade de álgebras. Provaremos que, quando F for um corpo de característica zero, o estudo das identidades polinomiais de um PI-álgebra A é reduzido ao estudo das chamadas identidades multilineares de A. Apresentaremos um corolário dos Teoremas de Birkhoff-Poincaré-Witt e de Witt que permite escrever os polinômios multilineares numa base especial.

Ainda neste capítulo, introduziremos o conceito de sequência de codimensões e a calcularemos para a álgebra de Grassmann e das matrizes triangulares superiores de ordem 2×2. Provaremos o Teorema das Codimensões de Regev que fornece uma cota superior para a n-ésima codimensão de uma PI-álgebra.

2.1 Exemplos de PI-álgebras

Definição 2.1. *Uma PI-álgebra A é uma F-álgebra que satisfaz um polinômio não nulo em $F\langle X\rangle$. Isto é, existe $f(x_1, \cdots, x_n) \in F\langle X\rangle$ não nulo tal que:*

$$f(a_1, \cdots, a_n) = 0 \ , \forall a_1, \ldots, a_n \in A.$$

O polinômio f é dito uma identidade polinomial de A.

Observação 2.2. *Notemos que o termo constante de uma identidade polinomial f de uma F-álgebra A é nulo já que $f(0, \ldots, 0) = 0$.*

O polinômio standard de grau n é importante no estudo de PI-álgebras. Este é definido como:

$$St_n(x_1, \cdots, x_n) := \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

onde S_n é o grupo simétrico de grau n e $sgn(\sigma)$ denota o sinal da permutação $\sigma \in S_n$.

Definimos o comutador de peso 2(ou comutador duplo) como sendo o polinômio:

$$[x_1, x_2] := x_1x_2 - x_2x_1.$$

Indutivamente um comutador de peso $n \geq 3$ é definido como:

$$[x_1, \cdots, x_n] := [[x_1, \cdots, x_{n-1}], x_n].$$

Notemos que $St_2(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$.

O comutador goza das seguintes propriedades:

- (Anticomutatividade) $[x_1, x_2] = -[x_2, x_1]$;
- (Identidade de Jacobi) $[x_1, [x_2, x_3]] + [x_3, [x_1, x_2]] + [x_2, [x_3, x_1]] = 0$.

Vejamos alguns exemplos de PI-álgebras.

Exemplo 2.3.

- *Qualquer F-álgebra comutativa é uma PI-álgebra. De fato, se a e b são elementos de uma F-álgebra comutativa C então $ab = ba$. Assim, C satisfaz o comutador duplo: $[x_1, x_2]$.*

- *Uma F-álgebra nilpotente de expoente m é uma PI-álgebra, pois satisfaz o polinômio: $f(x_1, \cdots, x_m) = x_1 \cdots x_m$.*

- *A álgebra de Grassmann é uma PI-álgebra. Note que se $a, b \in \mathcal{G}$, podemos escrever $a = a_0 + a_1$ e $b = b_0 + b_1$ onde $a_0, b_0 \in \mathcal{G}^{(0)}$ e $a_1, b_1 \in \mathcal{G}^{(1)}$. Dessa maneira o comutador duplo de a, b é:*

$$[a, b] = a_1b_1 - b_1a_1 = 2a_1b_1.$$

Ou seja:

$$[a, b] \in \mathcal{G}^{(0)}.$$

Seja $c \in \mathcal{G}$. Como, $[a, b] \in \mathcal{G}^{(0)}$, temos que $[a, b]$ comuta com c e portanto:

$$[[a, b], c] = [a, b]c - c[a, b] = 0.$$

Logo a álgebra de Grassmann satisfaz o polinômio $[x_1, x_2, x_3]$.

- *A álgebra $UT_n(F)$ é uma PI-álgebra para a qual uma identidade polinomial é:*

$$f(x_1, \cdots, x_{2n}) = [x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}].$$

Para verificar esta afirmação, consideremos $A, B \in UT_n(F)$. Sabemos que os elementos da diagonal principal de $C = AB$ são da forma $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$, onde $i \in \{1, \dots, n\}$. O mesmo ocorre com os elementos da diagonal principal de $D = BA$. Assim $[A, B]$ é um elemento do radical de Jacobson de $UT_n(F)$, $J(UT_n(F))$. Como o expoente de $J(UT_n(F))$ é n, para quaisquer $A_1, \dots, A_{2n} \in UT_n(F)$, temos que

$$f(A_1, \cdots, A_{2n}) = 0.$$

- *Sejam $A, B, C \in M_2(F)$. Então:*

$$[[A, B]^2, C] = 0.$$

De fato, considere uma matriz $D \in M_2(F)$. A expressão matricial do polinômio característico associado é:

$$x^2 - tr(D)x + det(D).$$

Se $D = [A, B]$, temos que $tr(D) = 0$. Logo pelo Teorema de Cayley-Hamilton, temos:

$$D^2 + det(D).1_{M_2(F)} = 0.$$

Portanto $[A, B]^2$ é um múltiplo escalar da matriz identidade,$1_{M_2(F)}$.Conclusão:

$$[[A, B]^2, C] = 0.$$

Logo, $M_2(F)$ é uma PI-álgebra.

Além disso, $M_2(F)$ satisfaz $St_4(x_1, \ldots, x_4)$. Mais geralmente temos que $M_n(F)$ é uma PI-álgebra, pois satisfaz o polinômio:

$$St_{2n}(x_1, \cdots, x_{2n}).$$

Esse resultado é conhecido como o Teorema de Amitsur-Levitzki,(1950). A demonstração original é encontrada em [Ami-Lev]. Uma demonstração alternativa deste teorema pode ser encontrada em [Rosset].

Estas F-álgebras são exemplos clássicos de PI-álgebras.

Nessa dissertação, algumas PI-álgebras menos usuais merecem destaque.

Exemplo 2.4.

- *A F-álgebra $A_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{G} & \mathcal{G} \\ 0 & \mathcal{G}^{(0)} \end{pmatrix}$ é uma PI-álgebra, pois satisfaz o polinômio:*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = [x_1, x_2, x_3][x_4, x_5].$$

Para verificar esta afirmação, notemos que se $B_1, B_2 \in A_1$ então o comutador $C = [B_1, B_2]$ é tal que $c_{11} \in \mathcal{G}^{(0)}$, $c_{12} \in \mathcal{G}$ e $c_{21} = c_{22} = 0$. Observe que se $D \in A_1$ e $d_{11} = 0$ então $DC = 0$. Sejam B_3, B_4, B_5 elementos de A_1 e $E = [B_3, B_4, B_5]$. Como o elemento f_{11} do comutador $F = [B_3, B_4]$ pertence a $\mathcal{G}^{(0)}$, segue que $e_{11} = 0$ e portanto $EC = 0$. Assim, $f(x_1, \cdots, x_5)$ é uma identidade de A_1.

- *A F-álgebra $A_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{G}^{(0)} & \mathcal{G} \\ 0 & \mathcal{G} \end{pmatrix}$ é uma PI-álgebra, pois satisfaz o polinômio:*

$$g(x_1, \cdots, x_5) = [x_1, x_2][x_3, x_4, x_5].$$

Verificação análoga à anterior.

- *A F-álgebra* $M_{1,1}(\mathcal{G}) = \begin{pmatrix} \mathcal{G}^{(0)} & \mathcal{G}^{(1)} \\ \mathcal{G}^{(1)} & \mathcal{G}^{(0)} \end{pmatrix}$ *é uma PI-álgebra, já que esta satisfaz o polinômio:*

$$h(x_1, \cdots, x_5) = [[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5].$$

O primeiro fato a ser destacado, antes de verificar esta afirmação é descrever o centro dessa álgebra:

$$Z(M_{1,1}(\mathcal{G})) = \{A \in M_{1,1}(\mathcal{G}) | AB = BA,\ \forall B \in M_{1,1}(\mathcal{G})\}.$$

Não é difícil ver que o conjunto $\mathcal{B}$ formado pelas matrizes de $M_{1,1}(\mathcal{G})$ cujos os elementos da diagonal secundária são nulos e os elementos da diagonal principal são iguais está contido em $Z(M_{1,1}(\mathcal{G}))$. Sejam C e D matrizes de $M_{1,1}(\mathcal{G})$ com as seguintes características:

$$c_{11} = 1 \text{ e } c_{12} = c_{21} = c_{22} = 0,$$

$$d_{12} = e_1 \text{ e } d_{11} = d_{21} = d_{22} = 0.$$

Se $E \in Z(M_{1,1}(\mathcal{G}))$ então a comutatividade com a matriz C mostra que os elementos da diagonal secundária de E são nulos. A comutatividade com D, mostra que os dois elementos da diagonal principal de E são iguais. Portanto:

$$\mathcal{B} = Z(M_{1,1}(\mathcal{G})).$$

Verificar que $[[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5]$ é uma identidade de $M_{1,1}(\mathcal{G})$ equivale a verificar que:

$$[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] \in Z(M_{1,1}(\mathcal{G})).$$

Um cálculo direto, mas trabalhoso, mostra que se L_1, L_2, L_3, L_4 são elementos de $M_{1,1}(\mathcal{G})$, então $L_5 = [[L_1, L_2], [L_3, L_4]] \in \mathcal{B}$. Isto completa a nossa verificação.

Além de todos estes exemplos de PI-álgebras, vale destacar que qualquer F-álgebra de dimensão finita é uma PI-álgebra. Para verificar esta afirmação, faremos uma breve apresentação sobre polinômios homogêneos a qual será bastante importante para a compreensão da Seção 2.3.

2.2 Polinômios multilineares

Definição 2.5. *Dado $f(x_1, \cdots, x_n) \in F\langle X \rangle$, podemos descrever f a partir da soma dos seus monômios $\alpha_i u_i$:*

$$f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i; \alpha_i \in F, \alpha_i \neq 0.$$

Definimos $|u_j|_{x_i}$ *como sendo o número de ocorrências da variável* x_i *em* u_j*, e o grau de* f *em relação a* x_i *por:*

$$gr_{x_i}(f) := \underbrace{max}_{1\leq j\leq m} |u_j|_{x_i}.$$

Definimos o número de variáveis de u_j*, contadas com as suas respectivas multiplicidades, como sendo* $|u_j|$*.*

Caso $|u_1| = \ldots = |u_m|$*, dizemos que* f *é homogêneo. Para este polinômio, definimos o seu grau como sendo o número de variáveis, contando as repetições, de um dos seus monômios. Se* f *é um polinômio qualquer, definimos o grau de* f *como sendo:*

$$gr(f) = \underbrace{max}_{1\leq j\leq m} |u_j|.$$

Os exemplos a seguir servirão para fixar as idéias.

Exemplo 2.6. *Se* $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2^5x_3 + x_3x_1x_2x_3x_1^2$ *então:*

$$gr_{x_1}(f) = 3, gr_{x_2}(f) = 5 \text{ e } gr_{x_3}(f) = 2.$$

São exemplos de polinômios homogêneos:

Exemplo 2.7.
- $f(x_1, x_2, \cdots, x_5) = x_1x_2x_3^2 + x_5^4 + x_4^2x_1x_3,$
- $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1 + x_1^2x_3 + x_2^3.$

Alguns polinômios homogêneos, tais como os multihomogêneos e os multilineares, serão fundamentais para o estudo dos T-ideais em corpos infinitos e de característica zero respectivamente.

Definição 2.8. *Se* $|u_1|_{x_i} = \ldots = |u_m|_{x_i}$*, dizemos que* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *é homogêneo na variável* x_i*. Quando* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *é homogêneo em relação a todas as variáveis, dizemos que este é multihomogêneo. Para os polinômios multihomogêneos nas variáveis* $x_1, \ldots, x_n$*, existe a denominação de multigrau que é uma n-úpla com n entradas em que o número da i-ésima entrada determina o número de vezes em que* x_i *aparece em um monômio de* f*. Se* f *é um polinômio multihomogêneo em que todos os seus monômios têm* m *símbolos, contadas as repetições, então* f *é multihomogêneo de grau* m*. Quando* f *é multihomogêneo de multigrau* $(1, \ldots, 1)$*, dizemos que* f *é multilinear.*

Observação 2.9. *Considere* $g \in F\langle X\rangle$*. Com a definição anterior, nota-se que podemos decompor* g *na soma de parcelas distintas com as seguintes propriedades:*

- *1) Cada parcela é um polinômio multihomogêneo;*
- *2) Quaisquer duas parcelas desta decomposição têm multigraus diferentes.*

Denominamos estas parcelas de componentes multihomogêneas de g.

São exemplos de polinômios multihomogêneos:

Exemplo 2.10.

- $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2^3x_3^2 + x_3x_2x_3x_2x_1x_2$,
- $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2^2x_3^2x_4 + x_4x_2^2x_3x_1x_3$.

São exemplos de polinômios multilineares:

Exemplo 2.11.

- $c(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3x_2 + x_2x_1x_3$,
- $St_n(x_1, \ldots, x_n)$.

Daqui em diante representaremos o conjunto de polinômios multilineares de grau n por:

$$P_n = span_F\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} | \sigma \in S_n\}.$$

Dessa maneira, qualquer polinômio $f \in P_n$ pode ser escrito como:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}, \alpha_\sigma \in F.$$

Notemos que todo polinômio multilinear é linear em uma das suas variáveis.

Trabalhar com polinômios multilineares é bastante vantajoso.Para verificar se um polinômio multilinear f é ou não uma identidade de uma F-álgebra A de dimensão finita, basta aplicá-lo nos elementos de uma base de A.

Proposição 2.12. *Seja A uma F-álgebra de dimensão finita com base*

$$B := \{b_1, \ldots, b_m\}.$$

Considere $f \in F\langle X\rangle$ um polinômio multilinear de grau $n \geq 1$. Então f é uma identidade de A se, e só se,

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

para qualquer sequência $(a_1, \ldots, a_n)$ de elementos no conjunto B.

Demonstração: Seja f uma identidade de A. Então é claro que

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

para qualquer sequência $(a_1, \ldots, a_n)$ de elementos no conjunto B.

Reciprocamente, suponhamos que $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para qualquer sequência $(a_1, \cdots, a_n)$ de elementos no conjunto B. Seja Γ o conjunto formado por todas as aplicações de $\{1, \ldots, n\}$ em $\{1, \ldots, m\}$. Consideremos $c_1, \ldots, c_n \in A$ tais que:

$$c_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} b_j, \alpha_{i,j} \in F.$$

Como f é um polinômio multilinear, sabemos que este é linear em cada uma das suas variáveis. Assim:

$$f(c_1, \ldots, c_n) = \sum_{\sigma \in \Gamma} \alpha_{1,\sigma(1)} \ldots \alpha_{n,\sigma(n)} f(b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(n)}).$$

Como por hipótese $f(b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(n)}) = 0$ para todo $\sigma \in \Gamma$ segue que $f(c_1, \ldots, c_n) = 0$. Deste modo, $f \in Id(A)$. □

Observação 2.13. *Adaptando a demonstração desta proposição, pode-se provar que o resultado acima continua válido quando B é um conjunto infinito.*

Uma das consequências desse resultado é o seguinte corolário que prova a última afirmação feita na seção anterior.

Corolário 2.14. *Seja A uma F-álgebra de dimensão n. Então A satisfaz o polinômio standard de grau $n+1$.*

Demonstração: Seja $B = \{a_1, \cdots, a_n\}$ uma base de A. Como St_{n+1} é um polinômio multilinear de grau $n+1$, pela proposição anterior, basta calculá-lo numa $(n+1)$-úpla genérica cujas entradas são elementos de B: $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n+1}})$. Em outras palavras, queremos mostrar que:

$$St_{n+1}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n+1}}) = 0.$$

De fato, existe um $a_{i_k} = a_{i_j}$ com $i_k \neq i_j$.

Consideremos $\alpha \in A_{n+1}$, onde A_{n+1} é o subgrupo de S_{n+1} das permutações pares. Então $I = \{(i_k i_j)\gamma \mid \gamma \in A_{n+1}\}$ é o conjunto das permutações ímpares e os termos

$$(sgn(\alpha))(a_{i_{\alpha(1)}} \ldots a_{i_{\alpha(n+1)}}) \text{ e } (sgn((i_k i_j)(\alpha)))(a_{i_{\beta(1)}} \ldots a_{i_{\beta(n+1)}})$$

se cancelam.

Como α é uma permutação arbitrária de A_{n+1}, temos que $St_{n+1}(a_{i_1}, \cdots, a_{i_{n+1}}) = 0$ o que prova o resultado. □

2.3 T-ideais

Seja A uma F-álgebra. Consideramos o conjunto

$$Id(A) = \{f \in F\langle X\rangle | f \equiv 0 \text{ em } A\}$$

dos polinômios satisfeitos por A.

Não é difícil ver que $Id(A)$ é um ideal bilateral em $F\langle X\rangle$. Outro fato interessante é que $Id(A)$ é invariante por endomorfismos de $F\langle X\rangle$, ou seja se ϕ é um endomorfismo de $F\langle X\rangle$ então $\phi(Id(A)) \subseteq Id(A)$. Para verificar isto, consideremos um polinômio $f(x_1, \cdots, x_n)$ em $Id(A)$ e um endomorfismo β de $F\langle X\rangle$

$$\begin{cases} \beta : F\langle X\rangle \to F\langle X\rangle \\ \qquad x_i \mapsto g_i \end{cases}$$

Observemos que $f(g_1, \cdots, g_n) \equiv 0$ em A.

Ideais invariantes por endomorfismos são importantes na PI-teoria.

Definição 2.15. *Um ideal I em $F\langle X\rangle$ é um T-ideal se $\phi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo ϕ de $F\langle X\rangle$.*

Deste modo, $Id(A)$ é um T-ideal de $F\langle X\rangle$ dito o T-ideal de A.

Proposição 2.16. *Seja I um T-ideal de $F\langle X\rangle$. Então $Id(\frac{F\langle X\rangle}{I}) = I$.*

Demonstração: Primeiramente, seja $f \in I$. Considere a seguinte álgebra:

$$A = \frac{F\langle X\rangle}{I}.$$

Mostraremos que $Id(A) = I$. Se $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ e $h_1 + I, \ldots, h_n + I \in A$ então existe um endomorfismo ϕ de $F\langle X\rangle$ tal que

$$f(h_1 + I, \ldots, h_n + I) = f(h_1, \ldots, h_n) + I = \phi(f(x_1, \ldots, x_n)) + I.$$

Como I é um T-ideal, sabemos que $\phi(f(x_1, \ldots, x_n)) \in I$. Ou seja,

$$f(h_1 + I, \ldots, h_n + I) = I.$$

Como os polinômios $h_1, \ldots, h_n$ foram tomados arbitrariamente em $F\langle X\rangle$, concluímos que $f \in Id(A)$ e portanto $I \subset Id(A)$.

Reciprocamente, seja $f \in Id(A)$.

Temos

$$f(x_1, \ldots, x_n) + I = f(x_1 + I, \ldots, x_n + I) = I.$$

Portanto, $f(x_1, \cdots, x_n) \in I$.

Logo $Id(A) \subset I$ e a igualdade $I = Id(A)$ prova a proposição. $\square$

Um T-ideal I é gerado, como T-ideal, por um conjunto $S \subset F\langle X\rangle$ se todo elemento de I pode ser escrito como uma F-combinação linear de elementos da seguinte forma:

$$h_1 f(g_1, \ldots, g_n) h_2,$$

onde os polinômios $h_1, h_2, g_1, \ldots, g_n \in F\langle X\rangle$ e $f \in S$. Nesse caso, escrevemos $I = \langle S\rangle_T$. Dois conjuntos S_1 e S_2 são equivalentes se $\langle S_1\rangle_T = \langle S_2\rangle_T$.

Além disso, dizemos que um polinômio f é uma consequência de polinômios em um conjunto $S \subset F\langle X\rangle$ se $f \in \langle S\rangle$.

Em 1950, Specht conjecturou que todo T-ideal I sobre um corpo de característica zero era finitamente gerado, ou seja, existe um conjunto finito $S \subset F\langle X\rangle$ tal que $I = \langle S\rangle_T$. Em 1987, Kemer[Kemer3] provou esta conjectura.

Dizemos que uma PI-álgebra A satisfaz a propriedade da base finita se existe um conjunto finito não vazio $R \subset F\langle X\rangle$ tal que $Id(A) = \langle R\rangle_T$.

Provaremos a seguir que todo T-ideal sobre um corpo infinito é gerado por polinômios multihomogêneos. Descreveremos também o processo de multilinearização. Logo após provaremos que todo T-ideal sobre um corpo de característica zero é gerado por polinômios multilineares.

Teorema 2.17. *Sejam F um corpo infinito, A uma F-álgebra e $f(x_1, \cdots, x_n)$ uma identidade de A tal que $gr_{x_i}(f) = m$. Seja f_j a componente de f de grau $j(0 \leq j \leq m)$ em relação à x_i, ou seja, a parcela de f formada pela soma de todos monômios de grau j em relação à x_i. Então f_j é uma identidade de A.*

Demonstração: Por hipótese, sabemos que $f = \sum_{j=0}^{m} f_j$, onde cada f_j é a parcela de f que tem grau j em relação à variável x_i. Como o corpo é infinito existem elementos distintos $\alpha_0, \ldots, \alpha_m \in F$. Observemos que para qualquer $\alpha \in F$, vale:

$$f(x_1, \ldots, \alpha x_i, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{m} \alpha^k f_k(x_1, \ldots, x_n).$$

Como f é uma identidade de A, temos que $f(\overline{x}_1, \ldots, \alpha\overline{x}_i, \ldots, \overline{x}_n) = 0$ para quaisquer $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n \in A$. Logo se calcularmos $(\alpha_0, \ldots, \alpha_m)$ em f como fizemos para α, obteremos um sistema de equações com $m+1$ variáveis, $f_0, \cdots, f_m$:

$$\begin{cases} f_0 + \alpha_0 f_1 + \cdots + \alpha_0^m f_m = 0 \\ f_0 + \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_1^m f_m = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ f_0 + \alpha_m f_1 + \cdots + \alpha_m^m f_m = 0 \end{cases}$$

Para avaliar se este sistema homogêneo tem solução não trivial, temos que verificar se o determinante da matriz abaixo é nulo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_0^m \\ 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_m & \cdots & \alpha_m^m \end{pmatrix}$$

Notemos que $det(B^t) = \underbrace{\prod}_{0 \leq i < j \leq m} (\alpha_j - \alpha_i) \neq 0$ já que B é uma matriz de Vandermonde. Como $det(B) = det(B^t)$, concluímos que $f_0, \cdots, f_m$ são identidades da álgebra A. □

Um corolário imediato do teorema acima, o qual pode ser provado por uma simples indução no número de variáveis nas quais o polinômio é não-homogêneo é o seguinte:

Corolário 2.18. *Sejam F um corpo infinito e A uma F-álgebra. Considere $f \in Id(A)$. Então qualquer componente multihomogênea de f é uma identidade de A. Consequentemente, qualquer T-ideal sobre um corpo infinito é consequência de polinômios multihomogêneos.*

Seja A uma F-álgebra, onde F é um corpo infinito de característica diferente de 2. Dada $f \in Id(A)$ de grau k, veremos no próximo teorema que é possível obter a partir desta identidade, uma identidade multilinear de A de grau menor ou igual a k. Para simplificar a notação, denotaremos(como foi feito para provar a simplicidade de $M_n(F)$) o conjunto formado pelos inteiros positivos de 1 até n como:

$$\widehat{n} := \{1, \ldots, n\}.$$

Teorema 2.19 (Processo de Multilinearização)**.** *Sejam F um corpo infinito de característica diferente de 2 e $f(x_1, \cdots, x_n)$ uma identidade polinomial de uma F-álgebra A de grau k. Então existe uma identidade polinomial multilinear h de A cujo o grau é menor ou igual a k.*

Demonstração: Dividiremos esta demonstração em três etapas.

1ª etapa: Suponhamos que $gr_{x_i}(f) \leq 1$ para todo $i \in \widehat{n}$. Veremos que é possível obter uma identidade multilinear de A a partir de f.

Inicialmente, decomponhamos f na soma dos seus monômios:

$$f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j, \ \alpha_j \in F - \{0\}.$$

Caso tenhamos, para todo $i \in \widehat{n}$ e para todo $j \in \widehat{m}$, $|u_j|_{x_i} = 1$, não há nada para se fazer, pois f já é multilinear. Suponhamos que f não seja multilinear. Assim, existem $i \in \widehat{n}$ e $j, l \in \widehat{m}$ tais que $|u_j|_{x_i} = 0$ e $|u_l|_{x_i} = 1$. Seja x_{i_1} uma variável de f com esta propriedade e consideremos o seguinte endomorfismo de $F\langle X\rangle$:

$$\begin{cases} \phi_{i_1} : F\langle X\rangle \to F\langle X\rangle \\ x_j \mapsto 0 \text{ caso } j = i_1 \\ x_j \mapsto x_j \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

$\phi_{i_1}(f)$ é uma identidade de A, onde a variável x_{i_1} não aparece. Caso $\phi_{i_1}(f)$ seja multilinear, concluímos a demonstração deste primeiro caso. Caso contrário, existe uma variável x_{i_2} desta identidade com a propriedade que x_{i_1} tinha em f. Como na situação anterior, construímos um endomorfismo ϕ_{i_2} de $F\langle X\rangle$ que associa x_{i_2} a 0 e fixa as demais variáveis de $\phi_{i_1}(f)$. Caso $\phi_{i_2}(\phi_{i_1}(f))$ seja multilinear, terminamos a demonstração. Caso contrário, repetimos o procedimento anterior. Como o número de variáveis de f é finito, este algoritmo terminará em alguma etapa e obteremos uma identidade multilinear a partir da f.

2ª etapa: Suponhamos que $gr_{x_i}(f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)) = d > 1$ para algum $i \in \widehat{n}$. Veremos que é possível obter uma identidade h de A onde $gr_{y_i}(h(x_1, \ldots, \underbrace{y_i, y_{i+1}}_{\widehat{x_i}}, \ldots, x_n)) = gr_{y_{i+1}}(h(x_1, \ldots, \underbrace{y_i, y_{i+1}}_{\widehat{x_i}}, \ldots, x_n)) = d - 1$(nestas duas notações, a i-ésima variável de h é omitida e substituída por y_i e y_{i+1}). Por simplicidade, suporemos que $i = 1$.

Consideremos o seguinte polinômio:

$$h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n) - f(y_1, x_2, \ldots, x_n) - f(y_2, x_2, \ldots, x_n). \tag{2.1}$$

É fácil notar que h é uma identidade de A e que:

$$gr_{y_1}(f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n)) = gr_{y_2}(f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n)) = d;$$

$$gr_{y_1}(f(y_1, x_2, \ldots, x_n)) = gr_{y_2}(f(y_2, x_2, \ldots, x_n)) = d;$$

$$gr_{y_1}(h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)) = gr_{y_2}(h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)) = d - 1.$$

Se substituirmos y_1 e y_2 por x_1 na igualdade (2.1), temos:

$$h(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(2x_1, x_2, \ldots, x_n) - 2f(x_1, \ldots, x_n).$$

Seja f_i é a componente de f de grau i na variável x_1, assim:

$$f(2x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} 2^i f_i.$$

Verificaremos que h é não nulo. Suponha que h é o polinômio nulo. Assim, temos:

$$f(2x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} 2^i f_i = 2f(x_1, \ldots, x_n).$$

Logo:

$$f_0 = (2^2 - 2)f_2 + \ldots + (2^d - 2)f_d.$$

Sabemos que $gr_{x_1}(f_0) = 0$, mas $gr_{x_1}((2^2 - 2)(f_2) + \ldots + (2^d - 2)(f_d)) = d > 1$, o que é um absurdo. Assim, h é uma identidade não nula de A com a propriedade desejada.

3ª etapa: Demonstração do teorema.

Como F é um corpo infinito, podemos considerar $f(x_1, \ldots, x_n)$ multihomogêneo. Caso f obedeça as hipóteses da primeira etapa, basta aplicar o algoritmo desenvolvido nesta.

Caso isto não aconteça, temos que $gr_{x_i}(f) > 1$ para algum $i \in \widehat{n}$. Com uma indução no grau de x_i, construímos, a partir da etapa anterior, uma identidade g de A com $gr_{y_i}(g) \leq 1$. Repetindo esse procedimento, se necessário, para as outras variáveis de g, obtemos uma identidade $h(z_1, \ldots, z_m)$ onde $gr_{z_i}(h) \leq 1$ para todo $i \in \widehat{m}$. Aplicando o algoritmo da primeira etapa à h, concluímos o teorema. $\square$

Uma consequência do processo de multilinearização é que se F é um corpo de característica zero então todo T-ideal de $F\langle X\rangle$ é gerado por polinômios multilineares.

Teorema 2.20. *Suponhamos que F seja um corpo de característica zero. Seja $f \in F\langle X\rangle$. Então $f(x_1, \cdots, x_n)$ é uma consequência finita de polinômios multilineares.*

Demonstração: Consideremos o T-ideal: $I = \langle f\rangle_T$. Sabemos que existe uma F-álgebra A tal que $Id(A) = I$. Pelo Corolário 2.18 e para simplificar a demonstração, podemos supor que f é multihomogêneo. Aplicamos o processo de multilinearização: se $gr_{x_1}(f) = d > 1$ então escreveremos:

$$h = f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} \underbrace{g_i(y_1, y_2, x_2, \cdots, x_n)}_{g_i},$$

onde $gr_{y_1} g_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = i$, $gr_{y_2} g_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = d - i$
e $gr_{x_t} g_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = gr_{x_t} f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n)$ para todo $t = 2, \ldots, n$.

Como f é uma identidade de A, h também é uma identidade de A. Como $g_0, \ldots, g_d$ são as componentes multihomogêneas de h, segue do primeiro Corolário do Teorema 2.17 que cada uma dessas pertence a $Id(A)$. Assim:

$$\langle g_1, \ldots, g_{d-1}\rangle_T \subset \langle f\rangle_T.$$

Além disso, notemos que para todo i, temos:

$$g_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_n) = \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Como a característica de F é zero, segue que $\binom{d}{i} \neq 0$. Portanto:

$$\langle f\rangle_T = \langle g_1, \ldots, g_{d-1}\rangle_T.$$

Por uma indução, completamos a demonstração. □

Dizemos que f é uma identidade estável de uma F-álgebra A se f for uma identidade de $A \otimes C$, onde C é uma F-álgebra comutativa qualquer. Em característica zero, todas as identidades de uma F-álgebra são estáveis, conforme o próximo resultado.

Proposição 2.21. *Sejam A uma F-álgebra e C uma F-álgebra comutativa unitária, onde F é um corpo de característica zero. Então $Id(A \otimes C) = Id(A)$.*

Demonstração: Suponhamos que f seja uma identidade de $A \otimes C$. Podemos supor que f é um polinômio multilinear, pois F tem característica zero. Admitamos que $gr(f) = n$. Então para quaisquer $a_1, \cdots, a_n \in A$ temos que:

$$f(a_1 \otimes 1, a_2 \otimes 1, \cdots, a_n \otimes 1) = f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \otimes 1 = 0.$$

Dessa maneira $f(a_1, \cdots, a_n) = 0$.

Reciprocamente, se f é uma identidade de A, podemos supor que f é um polinômio multilinear. Se $gr(f) = j$, é suficiente provar que, para quaisquer $a_1 \otimes m_1, \ldots, a_j \otimes m_j \in A \otimes C$, temos que

$$f(a_1 \otimes m_1, \ldots, a_j \otimes m_j) = 0.$$

Como C é uma álgebra comutativa, segue que:

$$f(a_1 \otimes m_1, \ldots, a_j \otimes m_j) = f(a_1, \cdots, a_j) \otimes m_1 \cdots m_j.$$

Sabemos que $f(a_1, \cdots, a_j) = 0$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_j \in A$, logo $f \in Id(A \otimes C)$. Isto conclui a nossa proposição. □

A próxima observação é uma importante consequência dos Teoremas de Birkhoff-Poincaré-Witt e Witt. Esses teoremas são clássicos resultados em PI-teoria, mas os seus enunciados com as suas respectivas demonstrações fogem ao escopo deste texto. O leitor interessado em mais informações pode consultar [Drensky].

Observação 2.22. *Qualquer polinômio multilinear $f \in F\langle X \rangle$ de grau n(F é um corpo de característica zero) pode ser escrito como uma F-combinação linear de polinômios do tipo:*

$$x_{i_1} \ldots x_{i_{s_1}} \underbrace{[x_{j_1}, \ldots, x_{j_{s_2}}]}_{c_1} \cdots \underbrace{[x_{l_1}, \cdots, x_{l_{s_m}}]}_{c_{m-1}},$$

onde $i_1 < \cdots < i_{s_1}$, os polinômios $c_1, \cdots, c_{m-1}$ são comutadores de pesos arbitrários nas demais variáveis e $\sum_{i=1}^{m} s_i = n$.

Veremos dois exemplos para fixar as idéias.

Exemplo 2.23. *Seja A uma F-álgebra comutativa unitária então:*

$$Id(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle_T.$$

De fato, sabemos que $[x_1, x_2]$ é uma identidade polinomial da álgebra A. Então:

$$\langle [x_1, x_2] \rangle_T \subset Id(A).$$

Seja f uma identidade de A. Podemos supor que f é multilinear já que o corpo é de característica zero. Pela observação anterior, sabemos que f pode ser escrito como:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \alpha x_1 \cdots x_n + g(x_1, \cdots, x_n), \tag{2.2}$$

onde $g \in \langle [x_1, x_2] \rangle_T$. Façamos $x_1 = \ldots = x_n = 1$ em (2.2). Dessa maneira:

$$f(1, \cdots, 1) - g(1, \cdots, 1) = 0,$$

pois $g \in \langle [x_1, x_2] \rangle_T \subset Id(A)$. Logo $\alpha 1^n = 0$ e portanto $\alpha = 0$. Assim $f \in \langle [x_1, x_2] \rangle_T$ e:

$$\langle [x_1, x_2] \rangle_T = Id(A).$$

Verificaremos no próximo exemplo que $Id(UT_2(F)) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$.

Exemplo 2.24. *Sabemos que $\langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T \subset Id(UT_2(F))$. Seja $f \in Id(UT_2(F))$ um polinômio multilinear de grau n. Sabemos que f se escreve, módulo $\langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$, como uma combinação linear de elementos da forma:*

$$x_{i_1} \ldots x_{i_r} [x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}], \tag{2.3}$$

onde $i_1 < \ldots < i_r$, $r + s = n$ e $\{i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s\} = \{1, \ldots, n\}$. Denotaremos $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$.

Notemos que se $x_1, \ldots, x_4 \in UT_2(F)$ então:

$$0 = [[x_1, x_2], [x_3, x_4]] = [x_1, x_2, x_3, x_4] - [x_1, x_2, x_4, x_3].$$

Dessa forma, para qualquer pemutação $\sigma \in S_p$ e $y_1, y_2, x_1, \ldots, x_p \in UT_2(F)$ temos que:

$$[y_1, y_2, x_1, \ldots, x_p] = [y_1, y_2, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}]. \tag{2.4}$$

Pela anticomutatividade e pela identidade de Jacobi do comutador, podemos manejar os três primeiros termos do comutador que aparecem à esquerda de (2.4). Assim, é possível reposicionar os elementos que aparecem no comutador de (2.3) de tal forma que:

$$j_1 > j_2 \text{ e } j_2 < j_3 < \ldots < j_s. \tag{2.5}$$

Consideremos $J = \{j_2, \ldots, j_s\}$ e $X_{I,J,j_1} = x_{i_1} \ldots x_{i_r} [x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}]$.

Posto isso, f pode se escrito módulo $\langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$ como:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{I,J,j_1} \alpha_{I,J,j_1} X_{I,J,j_1}, \ \alpha_{I,J,j_1} \in F. \tag{2.6}$$

Como $f \in Id(UT_2(F))$, ao calcularmos f em $(1_{UT_2(F)}, \ldots, 1_{UT_2(F)})$, concluímos que o coeficiente do monômio $x_1 \ldots x_n$ em (2.6) é nulo.

Para verificar que $f \in \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$, provaremos que todos os coeficientes α_{I,J,j_1} de (2.6) são nulos. Suponhamos por absurdo que essa afirmação não seja verdadeira. Dessa forma, existe um coeficiente $\alpha_{I',J',k}(I' = \{l_1, \ldots, l_{r'}\},\ J' = \{m_1, \ldots, m_{n-r'-1}\}$ e $\{l_1, \ldots, l_{r'}, m_1, \ldots, m_{n-r'-1}, k\} = \{1, \ldots, n\})$ não nulo, escolhido de tal forma que J' possua o menor número de elementos possível.

Façamos as seguintes substituições em (2.6):

$$(x_{l_1}, \ldots, x_{l_{r'}}) = (1_{UT_2(F)}, \ldots, 1_{UT_2(F)}),$$

$$x_k = E_{12},$$

$$(x_{m_1}, \ldots, x_{m_{n-r'-1}}) = (E_{22}, \ldots, E_{22}).$$

Com estas substituições feitas, temos que:

$$\alpha_{I',J',k}E_{12} = 0, \text{ ou seja, } \alpha_{I',J',k} = 0.$$

Contradição. Logo:

$$f \equiv 0 \quad (mod\ \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T).$$

Ou seja, $f \in \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$ e portanto:

$$Id(UT_2(F)) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T.$$

2.4 Variedade de álgebras

Na seção anterior, estudamos o T-ideal de uma F-álgebra A, o qual consiste do conjunto de todos os polinômios de $F\langle X \rangle$ que são satisfeitos por A. Contudo, podem existir outras álgebras que satisfazem as mesmas identidades de A. Isso motiva a definição de um novo conceito.

Definição 2.25. *Seja A uma F-álgebra. Denotamos por $var(A)$ a classe das F-álgebras que satisfazem todas as identidades de A, ou seja:*

$$var(A) = \{B | Id(A) \subset Id(B)\}.$$

Dizer que uma variedade $\mathcal{V}$ sobre F satisfaz um polinômio f significa dizer que todas as F-álgebras de $\mathcal{V}$ satisfazem o polinômio f.

Quando duas F-álgebras A e B são tais que $var(A) = var(B)$ então temos que A e B satisfazem exatamente as mesmas identidades. Deste modo definimos:

Definição 2.26. *Duas PI-álgebras A e B são álgebras PI-equivalentes se $Id(A) = Id(B)$. Escrevemos $A \cong_{PI} B$.*

Consideraremos um conjunto não vazio $S \subset F\langle X\rangle$ e nos preocuparemos em obter informações sobre o conjunto de álgebras que satisfazem o conjunto S, ou seja, satisfazem todos os polinômios de S.

Definição 2.27. *Sejam $S \subset F\langle X\rangle$ um conjunto não vazio de polinômios e $\langle S\rangle_T$ o T-ideal gerado por este conjunto. Denotamos por $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$ o conjunto de todas as álgebras que satisfazem o conjunto S. Além disso, dizemos que $Id(\mathcal{V}) = \langle S\rangle_T$ é o T-ideal da variedade $\mathcal{V}$. Quando existe uma F-álgebra A tal que $Id(A) = Id(\mathcal{V})$, denotaremos $\mathcal{V} = var(A)$ e diremos que $\mathcal{V}$ é a variedade gerada por A. Dizemos que uma variedade $\mathcal{V}$ é trivial se esta é gerada pela F-álgebra $\{0\}$. Uma variedade $\mathcal{V}$ é total se esta é gerada por $F\langle X\rangle$.*

Proposição 2.28. *Se $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$ é uma variedade de álgebras então existe uma F-álgebra A tal que $\mathcal{V} = var(A)$.*

Demonstração: De fato, considere o T-ideal $I = \langle S\rangle_T$. Como foi visto na Proposição 2.16, a F-álgebra $A = \frac{F\langle X\rangle}{I}$ é tal que: $Id(A) = I$. Dessa forma, $Id(A) = \langle S\rangle_T = Id(\mathcal{V})$ e portanto $var(A) = \mathcal{V}$. □

Exemplo 2.29. *A classe de todas as álgebras comutativas é $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$ onde $S = \{[x_1, x_2]\}$.*

Exemplo 2.30. *A classe de todas as algebras nil de expoente limitado por m é $\mathcal{V}(S)$ onde $S = \{x^m\}$.*

Finalizamos esta seção introduzindo uma classe de PI-álgebras importantes na PI-teoria.

Definição 2.31. *Uma álgebra A é dita verbalmente prima se, para quaisquer T-ideais $I_1, I_2 \in F\langle X\rangle$, o fato $I_1 I_2 \subset Id(A)$ implica que $I_1 \subset Id(A)$ ou $I_2 \subset Id(A)$.*

As variedades T-primas têm um papel essencial no estudo de PI-álgebras.

Definição 2.32. *Dizemos que uma variedade não trivial de álgebras $\mathcal{V} = var(A)$ é T-prima, se A é verbalmente prima.*

Em [Kemer] é demonstrado o seguinte resultado que classifica as variedades T-primas.

Teorema 2.33 (Kemer, 1985)**.** *Uma variedade não trivial $\mathcal{V}$ é T-prima se, e somente se, $\mathcal{V} = var(M_n(F))$, ou $\mathcal{V} = var(M_n(\mathcal{G}))$, ou $\mathcal{V} = var(M_{k,l}(\mathcal{G}))$ onde $M_{k,l}(\mathcal{G})$ é a álgebra das matrizes da forma:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} : \ com\ P \in M_k(\mathcal{G}^{(0)}),\ S \in M_l(\mathcal{G}^{(0)}),\ Q \in M_{k\times l}(\mathcal{G}^{(1)}),\ R \in M_{l\times k}(\mathcal{G}^{(1)}) \right\}.$$

2.5 Sequência de codimensões

Nesta seção, determinaremos o T-ideal da álgebra de Grassmann e encontraremos a sequência de codimensões desta álgebra e de $UT_2(F)$. Por último, provaremos o Teorema das Codimensões de Regev que fornece uma cota superior para a n-ésima codimensão de uma PI-álgebra.

Quando estamos trabalhando com corpos de característica zero, sabemos que todo T-ideal é finitamente gerado por polinômios multilineares, ou seja, por elementos dos espaços P_n, onde $n \geq 1$. Desta maneira, $Id(A)$ é gerado pelo seguinte subespaço vetorial de $F\langle X\rangle$:

$$(P_1 \cap Id(A)) \oplus (P_2 \cap Id(A)) \oplus \ldots \oplus (P_n \cap Id(A)) \oplus \ldots.$$

Se quisermos obter informações a respeito da dimensão de $(P_i \cap Id(A))$ seja qual for $i \geq 1$, analisaremos o comportamento de:

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}, n \geq 1.$$

Se conhecermos a dimensão de $P_n(A)$, determinamos a dimensão de $P_n \cap Id(A)$ a qual é igual a $n! - dim_F P_n(A)$. A dimensão de $P_n(A)$ recebe uma notação especial de $c_n(A)$ e é denominada a n-ésima codimensão de A:

$$c_n(A) = dim_F P_n(A), n \geq 1.$$

Conhecer a sequência $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ de uma F-álgebra A é bastante importante, pois fornece uma idéia do crescimento do T-ideal $Id(A)$. Isto tem impactos computacionais em determinados casos.

Definição 2.34. *Sejam $\mathcal{V} = var(A)$ a variedade de álgebras gerada por uma F-álgebra A. Definimos para todo $n \geq 1$:*

$$c_n(\mathcal{V}) := c_n(A).$$

O próximo resultado permite verificar se uma F-álgebra é ou não uma PI-álgebra.

Proposição 2.35. *A é uma PI-álgebra se, e somente, se $c_n(A) < n!$ para algum $n > 1$.*

Notemos que se $\mathcal{V}$ é uma variedade trivial então

$$c_n(\mathcal{V}) = 0, \ \forall\, n \geq 1.$$

Vamos dar informações sobre a sequência de codimensões para dois casos importantes. O primeiro caso é para uma F-álgebra nilpotente.

Exemplo 2.36. *Considere A uma F-álgebra nilpotente de expoente m. Se considerarmos $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$ onde $n \geq m$, temos que*

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

sejam quais forem $a_1, \ldots, a_n \in A$. Dessa forma, $c_n(A) = dim_F P_n(A) = 0$ quando $n \geq m$.

Calcularemos a sequência de codimensões de uma F-álgebra comutativa .

Exemplo 2.37. *Se A é uma F-álgebra comutativa unitária sabemos que*

$$Id(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle_T.$$

Qualquer polinômio de P_n pode ser escrito, módulo $P_n \cap Id(A)$, como combinação linear de elementos da forma:

$$x_1 \cdots x_n.$$

Logo $dim P_n(A) = 1$,$\forall$ $n \geq 1$.

Sabemos que, se I e J são dois T-ideais de $F\langle X \rangle$, existem F-álgebras A e B tais que $I = Id(A)$ e $J = Id(B)$. O resultado a seguir é importante para comparar a sequência de codimensões de A e B em duas situações específicas.

Proposição 2.38.
- *Se $I \subset J$ então $c_n(B) \leq c_n(A)$, $\forall n \geq 1$.*
- *Se $I \subset J$ e $c_n(A) = c_n(B)$ para todo $n \geq 1$ então $I = J$.*

Demonstração:

- Se $I \subset J$ temos que $Id(A) \subset Id(B)$ e portanto $P_n \cap Id(A) \subset P_n \cap Id(B)$. Dessa forma, $dim_F(P_n \cap Id(A)) \leq dim_F(P_n \cap Id(B))$. Assim, temos que $c_n(B) \leq c_n(A)$.
- Sabemos que se $I \subset J$ então $P_n \cap Id(A) \subset P_n \cap Id(B)$. Como por hipótese $c_n(A) = c_n(B)$ para todo $n \geq 1$, temos

  $$dim_F(P_n \cap Id(A)) = dim_F(P_n \cap Id(B)) \ \forall n \geq 1.$$

  Logo $P_n \cap Id(A) = P_n \cap Id(B)$ para todo n natural positivo.

Como todo T-ideal é gerado por polinômios multilineares(sobre um corpo de característica zero), concluímos: $Id(A) = Id(B)$.

□

Na Proposição 2.21, provamos que se A é uma álgebra sobre um corpo F de característica zero então $Id(A) = Id(A \otimes C)$ para qualquer F-álgebra comutativa unitária C. Em particular, se K é uma extensão de F, temos que $Id(A) = Id(A \otimes K)$ já que K é uma F-álgebra comutativa unitária. Contudo, nesta última igualdade, consideramos apenas as identidades de $A \otimes K$ como F-álgebra e assim:

$$c_n^F(A) = c_n^F(A \otimes K),\ n \geq 1.$$

Nesta igualdade, o índice superior significa que as duas sequências de codimensões são calculadas sobre o corpo F.

Na Proposição 1.32, provamos que toda base de A como F-álgebra é uma base para $A \otimes K$ como K-álgebra. Isto permitiu estender os escalares de A de maneira que A pudesse ser considerada como uma K-álgebra.

Uma pergunta natural a se fazer neste momento é: como se relaciona a sequência de codimensões de A como F-álgebra e a sequência de codimensões de A, considerada como K-álgebra. Quer dizer, qual a relação entre $c_n^F(A)$ e $c_n^K(A \otimes K)$, onde:

$$c_n^K(A \otimes K) = dim_K \frac{P_n^K}{P_n^K \cap Id_K(A \otimes K)}\ , n \geq 1.$$

Na notação acima, P_n^K denota o conjunto dos polinômios multilineares de grau n com coeficientes em K e $Id_K(A \otimes K)$ as identidades de $A \otimes K$ com coeficientes em K.

Proposição 2.39. *Sejam A uma PI-álgebra sobre um corpo F de característica zero e K uma extensão de F. Consideremos a K-álgebra $A \otimes K$. Então:*

$$c_n^K(A \otimes K) = c_n^F(A),\ \forall\ n \geq 1.$$

Demonstração: Seja $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e suponhamos que $c_n^F(A) = m$. Consideremos uma base $f_1, \ldots, f_m$ de $P_n^F(mod \quad P_n^F \cap Id_F(A))$, onde P_n^F denota o conjunto dos polinômios multilineares de grau n com coeficientes em F e $Id_F(A)$ as identidades de A com coeficientes em F. Para provarmos que $c_n^K(A \otimes K) \leq m$, basta mostrar que $dim_F(P_n^F \cap Id_F(A)) \leq dim_K(P_n^K \cap Id_K(A \otimes K))$ já que $dim_F P_n^F = dim_K P_n^K = n!$.

Notemos que os polinômios de $P_n^F \cap Id_F(A)$ são da forma:

$$h = j - \sum_{i=1}^{m} \beta_i f_i,$$

onde $j \in P_n^F$, os escalares $\beta_1, \ldots, \beta_m \in F$ e obedecem a seguinte propriedade:

$$\overline{j} = \sum_{k=1}^{m} \beta_i f_i,\ \text{onde}\ \overline{j} = \frac{j}{P_n^F \cap Id_F(A)}.$$

Como foi visto na Proposição 2.12, um polinômio não nulo em $F\langle X\rangle$ é uma identidade de A se, e só se, este se anula em uma base de A. Na Proposição 1.32 provamos que toda base de A sobre F é uma base de $A \otimes K$ sobre K. Como $h \in P_n^K$, aplicando estas duas proposições, temos que $h \in P_n^K \cap Id_K(A \otimes K)$ e consequentemente

$$c_n^K(A \otimes K) \leq m.$$

Para finalizarmos a demonstração, temos que verificar que $c_n^K(A \otimes K) \geq m$. Para isso, provaremos que $f_1, \ldots, f_m$ são linearmente independente $(mod\ P_n^K \cap Id_K(A \otimes K))$. Consideremos $f = (\gamma_1 f_1 + \ldots + \gamma_m f_m) \in Id_K(A \otimes K)$ com $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in K$. Seja C uma base de K sobre F. Escrevamos cada um dos γ_i na base C:

$$\gamma_i = \sum_j \delta_{i,j} t_j;\ i \in \{1 \ldots, m\}, t_1, t_2, \ldots \in C.$$

Sejam $a_1, \ldots, a_n \in A$ e $a_1 \otimes 1, \ldots, a_n \otimes 1 \in A \otimes K$. Assim:

$$f(a_1 \otimes 1, \ldots, a_n \otimes 1) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i f_i(a_1 \otimes 1, \ldots, a_n \otimes 1) = \sum_j (\sum_{i=1}^{m} \delta_{i,j} f_i(a_1, \ldots, a_n)) \otimes t_j.$$

Como $f \in Id_K(A \otimes K)$, temos que:

$$\sum_j (\sum_{i=1}^{m} \delta_{i,j} f_i(b_1, \ldots, b_n)) \otimes t_j = 0\ \forall\ b_1, \ldots, b_n \in A.$$

Notemos que para qualquer sequência $(b_1, \ldots, b_n)$ de elementos no conjunto A, os vetores $(\sum_{i=1}^{m} \delta_{i,j} f_i(b_1, \ldots, b_n)) \otimes t_1, (\sum_{i=1}^{m} \delta_{i,j} f_i(b_1, \ldots, b_n)) \otimes t_2, \ldots$, são linearmente independentes. Daí segue que $\sum_{i=1}^{m} \delta_{i,j} f_i \in Id(A)\ \forall j \in \{1, 2, \ldots\}$. Como $f_1, \ldots, f_m$ forma uma base para $P_n^F(mod\ P_n^F \cap Id_F(A))$ temos que:

$$\delta_{i,j} = 0; i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, 2, \ldots\}.$$

Logo $\beta_1 = \ldots = \beta_m = 0$ e assim:

$$c_n^F(A) = c_n^K(A \otimes K).$$

□

2.5.1 Codimensões de duas F-álgebras importantes

A seguir iremos calcular a sequência de codimensões de $UT_2(F)$. Logo depois, descreveremos o T-ideal da álgebra de Grassmann e calcularemos a sequência de codimensões desta álgebra.

Teorema 2.40. *Seja* $UT_2(F)$ *a álgebra das matrizes triangulares superiores* 2×2. *Então* $c_n(UT_2(F)) = 2^{n-1}(n-2) + 2$ *para todo* $n \geq 1$.

Demonstração: Se f é um polinômio multilinear de grau n, o Exemplo 2.24 nos permite escrevê-lo,módulo $I = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle$, como uma combinação linear de elementos da forma:

$$x_{i_1} \cdots x_{i_r}[x_k, x_{j_1}, \cdots, x_{j_s}], \tag{2.7}$$

onde $i_1 < \cdots < i_r$, $k > j_1$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_s$ e $r + s = n - 1$. Além disso, com aquele exemplo, temos que os elementos do tipo (2.7) formam uma base para

$$\frac{P_n}{P_n \cap Id(UT_2)}.$$

Contemos o número de elementos que são do tipo (2.7).Consideremos primeiro, o caso em que há j termos dentro dos comutadores, onde $2 \leq j \leq n$. O número total é:

$$\binom{n}{j}(j-1).$$

Quando $j = 0$, temos apenas um caso.

Assim, temos:

$$c_n(UT_2(F)) = \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j}(j-1) + 1.$$

Para calcular $c_n(UT_2(F))$, note que:

$$\binom{n}{j}(j-1) = \frac{n!}{(n-j)!j!}(j-1) = \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} - \frac{n!}{(n-j)!j!}.$$

Logo:

$$\sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j}(j-1) + 1 = n(\sum_{j=2}^{n} \binom{n-1}{j-1}) - (2^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{1}) + 1 =$$

$$n(\sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j}) - (2^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{1}) + 1 =$$

$$n(2^{n-1} - 1) + (2 + n - 2^n) = 2^{n-1}(n-2) + 2.$$

Isto conclui a demonstração. $\square$

Teorema 2.41. *Para todo $n \geq 1$, temos que $c_n(\mathcal{G}) = 2^{n-1}$. Além disso, $Id(\mathcal{G}) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$.*

Demonstração: Relembremos que $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3] \in Id(\mathcal{G})$. Dessa forma, $L := \langle f \rangle_T \subset Id(\mathcal{G})$ e portanto $c_n(\mathcal{G}) \leq dim_F(\overline{L}_n)$ onde:

$$\overline{L}_n = \frac{P_n}{P_n \cap L}.$$

Se g é um polinômio multilinear de grau n, sabemos pela Observação 2.22 que este pode ser escrito, módulo L, como combinação linear de elementos da forma:

$$x_{i_1} \cdots x_{i_r} [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}], \tag{2.8}$$

onde $i_1 < \ldots < i_r$, $r + 2m = n$. Sem perda de generalidade, podemos assumir:

$$j_1 < j_2, \ldots \quad \text{e} \quad j_{2m-1} < j_{2m}. \tag{2.9}$$

Temos para quaisquer $a, b, c, d \in F\langle X \rangle$:

$$[a, b, [c, d]] = [a, b][c, d] - [c, d][a, b]. \tag{2.10}$$

Além disso, um cálculo com comutadores nos mostra que:

$$[a, c][b, d] = -[a, b][c, d] + [ab, c, d] + [ac, b, d] - [a, b, d]c - [a, c, d]b. \tag{2.11}$$

Com auxílio das igualdades (2.10) e (2.11), a relação (2.9) fica como:

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_{2m}. \tag{2.12}$$

Por outro lado, um cálculo combinatório nos mostra que:

$$c_n(\mathcal{G}) \leq dim_F(\overline{L}_n) = 2^{n-1}.$$

Os elementos de (2.8) com a propriedade (2.12) formam um conjunto gerador para $\dfrac{P_n}{P_n \cap Id(\mathcal{G})}$. Provaremos que este conjunto é linearmente independente. Feito isso, concluíremos que $c_n(\mathcal{G}) = 2^{n-1}$ e que $Id(\mathcal{G}) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$.

Consideremos um polinômio multilinear $h(x_1, \ldots, x_{r+2m})$ que é uma identidade de $\mathcal{G}$.

$$h = \sum_{i_1 < \ldots < i_r \ j_1 < \ldots < j_{2m}} \alpha_{I,J} x_{i_1} \ldots x_{i_r} [x_{j_1}, x_{j_2}] \ldots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}], \tag{2.13}$$

onde $I = \{i_1, \cdots, i_r\}$, $J = \{j_1, \cdots, j_{2m}\}$ e $\alpha_{I,J} \in F$.

Provaremos que todos os coeficientes $\alpha_{I,J}$ são nulos. Suponhamos por absurdo que esta afirmação não seja verdadeira. Então existe um coeficiente $\alpha_{I',J'}$ não nulo, onde $I' = \{p_1, \ldots, p_s\}$, $J' = \{k_1, \ldots, k_{n-s}\}$ e $\{p_1, \ldots, p_s, k_1, \ldots, k_{n-s}\} = \{1, \ldots, n\}$. Além disso J' é escolhido de forma ser o menor possível.

Façamos $x_{p_1} = \ldots = x_{p_s} = 1$ e $x_{k_l} = e_l$ onde $1 \leq l \leq n - s$ em (2.13). Feito isso, concluímos que $2^{n-s}.\alpha_{I',J'}e_1 \ldots e_{n-s} = 0$ e portanto $\alpha_{I',J'} = 0$. Isto é uma contradição. Logo esta comprovada a independência linear afirmada durante a demonstração. $\square$

2.5.2 Uma cota superior para as codimensões

Conhecer a sequência de codimensões de uma PI-álgebra é importante, mas muitas vezes obtê-la é uma tarefa bastante difícil. Para contornar este problema e ter mais informações sobre essa sequência, usamos outro recurso: obtemos uma cota superior para a sua n-ésima codimensão, onde $n \geq 1$. Esta tarefa é mais simples. Um dos principais resultados a respeito deste assunto é o Teorema das Codimensões de Regev que será provado nesta subseção. Lembremos que estamos trabalhando em corpos de característica zero.

Para F-álgebras de dimensão finita, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.42. *Seja A uma PI-álgebra de dimensão $d < \infty$. Então $c_n(A) \leq d^n$ para todo $n \geq 1$.*

Demonstração: Seja f uma identidade da F-álgebra A. Podemos supor sem perda de generalidade que f é multilinear de grau n:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

Seja $\beta = \{a_1, \cdots, a_d\}$ uma base de A e γ o conjunto das n-úplas cujas as entradas são elementos de β. Sabemos que γ tem d^n elementos. Como f é uma identidade polinomial de grau n de A, sabemos que f se anula em todos os elementos de γ. Este fato pode ser descrito a partir de um sistema homogêneo com $n!$ variáveis, correspondentes aos termos α_σ que aparecem no somatório de f, e d^n equações lineares, cada uma correspondente a um elemento de γ.

$$\begin{cases} \sum\limits_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma a_1 \ldots a_1 = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \sum\limits_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma a_1 a_2 \ldots a_n = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \sum\limits_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma a_d \ldots a_d = 0 \end{cases}$$

Notemos que a dimensão do espaço solução do sistema acima é maior ou igual a $n! - d^n$. Mas a dimensão do espaço solução do sistema acima é igual a dimensão de $P_n \cap Id(A)$. Como $c_n(A) = dim_F(P_n) - dim_F(P_n \cap Id(A))$, segue que $c_n(A) \leq d^n$. □

Para provarmos o Teorema das Codimensões de Regev, estabeleceremos uma ordem parcial conveniente sobre $\widehat{n} = \{1, \ldots, n\}$. Relembremos que um conjunto P munido de uma relação $(\prec)$, o qual denotamos por $(P, \prec)$, é parcialmente ordenado se, para quaisquer $a_1, a_2, a_3 \in P$, valem as seguinte propriedades:

- $a_1 \prec a_1$ (**Reflexividade**);
- $a_1 \prec a_2$ e $a_2 \prec a_3$ implica que $a_1 \prec a_3$ (**Transitividade**);
- $a_1 \prec a_2$ e $a_2 \prec a_1$ implica que $a_1 = a_2$ (**Anti-simetria**).

Os elementos $b_1, \ldots, b_k$ em P formam uma cadeia de comprimento k se $b_1 \prec \ldots \prec b_k$. Caso não tenhamos $b_i \prec b_j$ para quaisquer elementos $i \neq j$, dizemos que os elementos $b_1, \ldots, b_k$ formam uma anticadeia de comprimento k de P.

Definição 2.43. *Sejam x e y dois elementos de $\widehat{n}$ e $\sigma \in S_n$. Dizemos que $x \prec y$ com relação à permutação σ se :*

- *$x = y$ ou*
- *$x < y$ implicar que $\sigma(x) < \sigma(y)$.*

Com a definição acima, o conjunto $\widehat{n}$ é ordenado parcialmente com relação à σ e uma anticadeia de comprimento k em $\widehat{n}$(com relação a σ) é um conjunto $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \widehat{n}$ onde $i_1 < \ldots < i_k$ com $\sigma(i_1) > \ldots > \sigma(i_k)$. Isto motiva a próxima definição.

Definição 2.44. *Seja $\sigma \in S_n$ e $2 \leq d \leq n$. Dizemos que σ é d-ruim, se existem $1 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq n$ tais que $\sigma(i_1) > \ldots > \sigma(i_d)$. No caso em que σ não é d-ruim, dizemos que esta é d-boa. Em outras palavras, σ é d-boa se, para qualquer sequência $1 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq n$, existem $i_k < i_j$ tais que $\sigma(i_k) < \sigma(i_j)$. Denotamos por $d(\sigma)$ o comprimento da maior anticadeia com relação à permutação σ.*

Desta forma, se uma permutação $\sigma \in S_n$ é d-boa então o comprimento máximo possível de uma anticadeia em $\widehat{n}$, com relação à ordenação da definição anterior, é $d - 1$.

Para fixar as idéias, consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 2.45. *Seja $n = 6$ e considere a seguinte permutação de S_6:*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Notemos que $d(\pi) = 4$*, pois* $1 < 2 < 3 < 5$ *e* $\pi(1) > \pi(2) > \pi(3) > \pi(5)$ *e não há nenhuma anticadeia de comprimento* 5*. Logo,* π *é* 5*-boa e* 6*-boa.*

Atualmente, vários problemas de análise combinatória estão em aberto. No século passado, esta área teve um avanço razoável. Após a Segunda Guerra Mundial, o matemático Dilworth publicou um trabalho bastante importante que descreve o número máximo de cadeias disjuntas que um conjunto parcialmente ordenado se decompõe.

Teorema 2.46 (Teorema de Dilworth)**.** *Seja* $(P, \prec)$ *um conjunto parcialmente ordenado. Se o comprimento da maior anticadeia de* P *é igual a* d *então* P *pode ser decomposto na união de no máximo* d *cadeias disjuntas.*

Demonstração: Veja [Dil]. □

Corolário 2.47. *Seja* $\prec$ *a relação de ordem parcial do conjunto* $\widehat{n}$ *com relação a uma permutação* d*-boa* σ*. Então* $\widehat{n}$ *pode ser decomposto como a união de no máximo* $(d-1)$ *cadeias disjuntas.*

Demonstração: A demonstração desse corolário é uma mera reformulação do Teorema de Dilworth. Desde que σ é uma permutação d-boa, o comprimento máximo de uma anticadeia em $\widehat{n}$ é $d-1$. Assim $\widehat{n}$ se decompõe em $d-1$ cadeias no máximo.

□

O próximo resultado permite contar o número de permutações d-boas de S_n.

Lema 2.48. *O número de permutações* d*-boas de* S_n *não excede* $(d-1)^{2n}$*.*

Demonstração: Notemos inicialmente que o número de decomposições de $\widehat{n} = I_1 \cup \ldots \cup I_k$ em subconjuntos disjuntos em que $k \leq (d-1)$ é limitado por $(d-1)^n$. Para verificar isto, note que cada elemento de $\widehat{n}$ pode estar em apenas um dos k conjuntos: $I_1, \ldots, I_k$. Assim, o número de escolhas possíveis para cada elemento é k e então o número total de possibilidades de fazer tal decomposição é menor ou igual a k^n. Como $k \leq (d-1)$, segue que o número de maneiras de decompor $\widehat{n}$ não excede $(d-1)^n$.

Fixemos uma decomposição de $\widehat{n}$ em subconjuntos disjuntos:

$$\widehat{n} = J_1 \cup \ldots \cup J_l \text{ em que } l \leq (d-1). \tag{2.14}$$

Faremos uma estimativa do número de permutações $\sigma \in S_n$ que preservam a ordem dos elementos de cada um dos subconjuntos $J_1, \ldots, J_l$ de (2.14). Como 1_{S_n} preserva a ordem dos elementos de cada um dos subconjuntos de (2.14), temos que o conjunto M das permutações que preservam a ordem de (2.14) é não vazio. Seja σ uma permutação de M e considere $L_s = \sigma(J_s) = \{\sigma(v) \mid v \in J_s\}$, onde temos que $1 \leq s \leq l$. Claramente $\widehat{n} = L_1 \cup \ldots \cup L_l$. Sabemos que $\sigma(1) \in \{x_1, \ldots, x_l\}$ onde

$x_i = \min\{a|a \in L_i\}$. Se denotarmos por $L'_t = L_t \setminus \{\sigma(1)\}$ para todo $t \in \{1, \ldots, l\}$ então $\sigma(2) \in \{y_1, \ldots, y_l\}$ onde $y_j = \min\{a|a \in L'_j\}$. Caso algum L'_i for vazio, o desconsideramos nesta segunda etapa. Repitamos esse processo até o elemento $\sigma(n)$. Vemos assim que o número máximo de permutações que preservam (2.14) não excede l^n. Como $l \leq (d-1)$, temos que esse número é limitado por $(d-1)^n$.

Pelo Teorema de Dilworth, sabemos que se σ é uma permutação d-boa, o número máximo de cadeias disjuntas de $\widehat{n}$ não excede $d-1$.Combinando este resultado com os cálculos feitos nos dois parágrafos anteriores, temos que o número de permutações d-boas não excede $(d-1)^{2n}$. $\square$

O conceito de permutação d-boa pode ser aplicado para encontrar um cota superior para a sequência de codimensões de uma PI-álgebra. Dizemos que um monômio $x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} \in P_n$ é d-bom (d-ruim) se a permutação $\sigma \in S_n$ é d-boa(resp. d-ruim).

Antes de provarmos o Teorema de Regev, precisaremos introduzir o conceito de boa ordem. Iremos definir a ordem monomial lexicográfica à esquerda para os monômios de P_m.

Definição 2.49. *Seja $(P, \prec)$ um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que P é totalmente ordenado se para quaisquer $a, b \in P$ vale:*

$$a \prec b \text{ ou } b \prec a.$$

Se P é totalmente ordenado, dizemos que P é bem ordenado se, para qualquer subconjunto não vazio Q de P, vale a seguinte propriedade:

$$\exists c \in Q; c \prec d \ \forall d \in Q.$$

Definição 2.50. *Sejam $\mathbb{N}^m$ o conjunto das m-úplas com coeficientes em $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}^m$ o conjunto das m-úplas com coeficientes em $\mathbb{Z}$. Uma ordem monomial em P_m é uma relação $\prec$ em $\mathbb{N}^m$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

- *$\prec$ é uma boa ordem em $\mathbb{N}^m$;*
- *Se $\alpha \prec \beta$ e $\gamma \in \mathbb{N}^m$ então $\alpha + \gamma \prec \beta + \gamma$.*

A seguir definiremos a ordem lexicográfica à esquerda.

Definição 2.51. *Sejam $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ e $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ elementos de $\mathbb{N}^m$. Dizemos que $\alpha \prec_{lex\text{-}esq} \beta$ se $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^m$ e a entrada não nula mais à esquerda é negativa. Isto induz um ordem monomial em P_m onde para quaisquer dois monômios $M_1 = x_{i_1} \ldots x_{i_m}$ e $M_2 = x_{j_1} \ldots x_{j_m}$ definimos:*

$$M_1 < M_2 \Leftrightarrow (i_1, \ldots, i_m) \prec_{lex\text{-}esq} (j_1, \ldots, j_m).$$

Teorema 2.52 (Teorema das Codimensões de Regev,1972)**.** *Sejam A uma PI-álgebra sobre um corpo F. Se A satisfaz uma identidade de grau $d \geq 1$ então $c_n(A) \leq (d-1)^{2n}$.*

Demonstração: Como F é um corpo de característica zero, podemos admitir que A satisfaz um polinômio multilinear f de grau d:

$$f(x_1, \ldots, x_d) = x_1 \ldots x_d - \sum_{\sigma \in S_d \ , \ \sigma \neq Id_{S_d}} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(d)}.$$

Ou seja:

$$x_1 \ldots x_d - \sum_{\sigma \in S_d \ , \ \sigma \neq Id_{S_d}} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(d)} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ P_n \cap Id(A)). \tag{2.15}$$

Para provarmos o teorema de Regev, basta verificar que o espaço P_n, módulo $P_n \cap Id(A)$, é gerado pelos monômios d-bons. Suponhamos por absurdo que isso seja falso, ou seja, suponhamos que o conjunto β formado por todos os monômios de P_n que não podem ser escritos, mod $P_n \cap Id(A)$, como uma combinação linear de monômios d-bons seja não vazio. Introduzindo a ordem lexicográfica à esquerda em β, sabemos que existe um monômio $g(x_1, \ldots, x_n) = x_{i_1} \ldots x_{i_n}$ que é o elemento minimal desse conjunto.

Consideremos a seguinte permutação de S_n:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}.$$

Como $x_{i_1} \ldots x_{i_n} \in \beta$, segue que ρ é d-ruim. Dessa forma, existem $1 \leq j_1 < \ldots < j_d \leq n$ tais que $\rho(j_1) > \ldots > \rho(j_d)$. Consideremos os seguintes elementos:

$$a_0 = x_{i_1} \ldots x_{\rho(j_1 - 1)}, \ a_1 = x_{\rho(j_1)} \ldots x_{\rho(j_2 - 1)}, \ \ldots \ , a_d = x_{\rho(j_d)} \ldots x_{i_n}.$$

Observemos que $a_d < a_{d-1} < \ldots < a_1$ pela ordem lexicográfica à esquerda. Por esta construção, temos que $g(x_1, \ldots, x_n) = a_0 a_1 \ldots a_d$ e para qualquer permutação $\sigma \in S_d$ diferente da identidade de S_d, vale:

$$a_0 a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(d)} < a_0 a_1 \ldots a_d.$$

Pela minimalidade de g, segue que qualquer monômio $a_0 a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(d)}$, módulo $P_n \cap Id(A)$, pode ser escrito como uma combinação linear de monômios d-bons. Além disso, pela igualdade (2.15), temos que:

$$a_0 a_1 \ldots a_d \equiv \sum_{\sigma \in S_d \ , \ \sigma \neq Id_{S_d}} \alpha_\sigma a_0 a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(d)} \ (\mathrm{mod}\ P_n \cap Id(A)).$$

Com estas duas informações, concluímos que g, módulo $P_n \cap Id(A)$, pode ser escrito como uma combinação de monômios d-bons. Este absurdo prova o teorema. $\square$

Capítulo 3

Superálgebras

No primeiro capítulo deste texto, apresentamos a álgebra de Grassmann e listamos algumas de suas propriedades. Uma delas afirmava que existem espaços vetoriais $\mathcal{G}^{(0)}$ e $\mathcal{G}^{(1)}$ tais que:

- $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)} \oplus \mathcal{G}^{(1)}$;
- $\mathcal{G}^{(0)}\mathcal{G}^{(0)} + \mathcal{G}^{(1)}\mathcal{G}^{(1)} \subset \mathcal{G}^{(0)}$;
- $\mathcal{G}^{(1)}\mathcal{G}^{(0)} + \mathcal{G}^{(0)}\mathcal{G}^{(1)} \subset \mathcal{G}^{(1)}$.

O nosso objetivo nesse capítulo é estudar estas três propriedades para uma F-álgebra qualquer.

3.1 Primeiros conceitos

Definição 3.1. *Dizemos que uma F-álgebra A é uma superálgebra se existem dois subespaços vetoriais $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$,tais que:*

- $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$;
- $A^{(0)}A^{(0)} + A^{(1)}A^{(1)} \subset A^{(0)}$;
- $A^{(1)}A^{(0)} + A^{(0)}A^{(1)} \subset A^{(1)}$.

Notemos que $A^{(0)}$ é uma F-subálgebra de A, entretanto $A^{(1)}$ não é uma F-álgebra. Denominamos o par $(A^{(0)}, A^{(1)})$ como uma $\mathbb{Z}_2$-graduação de A. Por simplicidade, denominamos $A^{(0)}$ como sendo a parte par e $A^{(1)}$ como sendo a parte ímpar. Qualquer elemento $a \in A$ é escrito como $a_0 + a_1$ onde $a_0 \in A^{(0)}$ e $a_1 \in A^{(1)}$. Dizemos que a_0 e a_1 são as parcelas homogêneas de a.

Muitos autores costumam se referir às F-superálgebras como F-álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas ou F-álgebras homogêneas. O leitor mais atento deve ter notado que; com esta definição, toda F-álgebra é uma F-superálgebra com $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial, ou seja, $(A, \{0\})$.

Para fixar as idéias, vejamos um exemplo que será bastante importante na classificação das F-superálgebras simples de dimensão finita.

Exemplo 3.2. *Consideremos G um grupo de ordem 2 e c o seu gerador. A álgebra de grupo FG é uma F-superálgebra com a seguinte $\mathbb{Z}_2$-graduação:*

$$(F, cF).$$

Mais geralmente, a F-álgebra $M_n(F \oplus cF)$ é uma F-superálgebra com a seguinte $\mathbb{Z}_2$-graduação:

$$(M_n(F), cM_n(F)), \ \ \textit{onde } c^2 = 1.$$

O próximo teorema será fundamental para verificar se uma F-álgebra é uma F-superálgebra com $\mathbb{Z}_2$-graduação não-trivial.

Teorema 3.3. *Seja A uma F-álgebra. Então A é uma F-superálgebra com $\mathbb{Z}_2$-graduação não trivial se, e somente se, existir um automorfismo ϕ de A de ordem 2.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que A seja uma F-superálgebra com $\mathbb{Z}_2$-graduação não trivial. Sejam $a_0 \in A^{(0)}$ e $a_1 \in A^{(1)}$ e consideremos o seguinte homomorfismo de F-álgebras:

$$\begin{cases} \phi : A \to A \\ a_0 + a_1 \mapsto a_0 - a_1 \end{cases}$$

Observemos que ϕ é elemento de $Aut(A)$. Além disso, notemos que $\phi^2(a_0 + a_1) = \phi(a_0 - a_1) = a_0 + a_1$ e que $\phi \neq Id_A$ já que a $\mathbb{Z}_2$-graduação é não trivial. Portanto ϕ tem ordem 2 e a primeira parte do teorema está demonstrada.

Reciprocamente, suponhamos que A seja uma F-álgebra e que exista um automorfismo ϕ de A que tenha ordem 2. Podemos definir os seguintes subespaços de A:

$$A^{(0)} = \{a \in A | \phi(a) = a\} \text{ e } A^{(1)} = \{\ a \in A | \phi(a) = -a\}.$$

Notemos que se $a \in A^{(0)} \cap A^{(1)}$ então $a = 0$ e portanto $A^{(0)} \cap A^{(1)} = \{0\}$. Também é fácil ver que

$$A^{(0)}A^{(0)} + A^{(1)}A^{(1)} \subset A^{(0)} \text{ e } A^{(0)}A^{(1)} + A^{(1)}A^{(0)} \subset A^{(1)}.$$

Além disso, se $a \in A$, afirmamos que existem $a_0 \in A^{(0)}$ e $a_1 \in A^{(1)}$ tais que $a = a_0 + a_1$. Para isso, consideremos os seguintes candidatos:

$$a_0 = \frac{a + \phi(a)}{2} \ \text{ e } \ a_1 = \frac{a - \phi(a)}{2}.$$

Observemos que

$$\phi(a_0) = \frac{a + \phi(a)}{2} = a_0 \text{ e } \phi(a_1) = \frac{\phi(a) - a}{2} = -a_1.$$

Logo, A é uma F-superálgebra com $\mathbb{Z}_2$-graduação não-trivial, pois $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ e $A^{(1)} \neq \{0\}$, pois ϕ tem ordem 2. □

Finalizaremos esta primeira parte com uma definição bastante importante.

Definição 3.4. *Sejam A uma F-superálgebra e B uma F-subálgebra de A. Dizemos que B tem $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida de A, ou herda a $\mathbb{Z}_2$-graduação de A, se*

$$(B \cap A^{(0)}, B \cap A^{(1)})$$

for uma $\mathbb{Z}_2$-graduação de B. Analogamente, dizemos que um ideal bilateral I de A tem $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida de A, ou herda a $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida de A, se $(I \cap A^{(0)}, I \cap A^{(1)})$ for uma $\mathbb{Z}_2$-graduação de I visto como álgebra.

Observação 3.5. *Notemos que se A é uma F-superálgebra de dimensão finita então $J(A)$ e qualquer subálgebra de A herdam a $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida dessa superálgebra.*

3.2 F-Superálgebras simples

Nesta seção, apresentaremos as F-superálgebras simples de dimensão finita. Considere uma F-superálgebra tal que $A^2 \neq 0$ e o automorfismo de ordem 2 dado por $\phi(a_0 + a_1) = a_0 - a_1$, onde $a_0 \in A^{(0)}$ e $a_1 \in A^{(1)}$.

Definição 3.6. *Dizemos que um ideal bilateral I é ϕ-invariante se $\phi(I) = I$ e que A é simples, como superálgebra, se esta não possuir ideais bilateriais próprios ϕ-invariantes.*

Notemos que qualquer F-superálgebra que é simples como F-álgebra é trivialmente simples como F-superálgebra. Sempre que nos referirmos a uma F-superálgebra simples estaremos afirmando que ela é simples como F-superálgebra.

Consideremos três exemplos de F-superálgebras simples importantes que serão protagonistas na classificação das F-superálgebras simples de dimensão finita.

Exemplo 3.7. *Considere a F-superálgebra $A = M_n(F)$ com $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial. Sabemos que $M_n(F)$ é simples como álgebra. Assim, $M_n(F)$ é uma superálgebra simples.*

Exemplo 3.8. *Considere a superálgebra $M_n(F \oplus cF)$ do Exemplo 3.2. $M_n(F \oplus cF)$ é uma F-álgebra semi-simples, pois:*

$$M_n(F \oplus cF) = (\frac{1+c}{2} M_n(F)) \odot (\frac{1-c}{2} M_n(F)).$$

Mas seus únicos ideais bilaterais não triviais são:

$$\left(\frac{1+c}{2}M_n(F)\right) \ e \ \left(\frac{1-c}{2}M_n(F)\right).$$

É fácil ver que estes dois ideais não são ϕ-invariantes. Assim, $M_n(F \oplus cF)$ é uma F-superálgebra simples.

Exemplo 3.9. *Considere a álgebra*

$$M_{k,l}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} : P \in M_{k\times k}(F),\ S \in M_{l\times l}(F),\ Q \in M_{k\times l}(F),\ R \in M_{l\times k}(F) \right\},$$

em que $k \geq l > 0$ e uma $\mathbb{Z}_2$-graduação é:

$$M_{k,l}^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \right\}, \quad M_{k,l}^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Q \\ R & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Afirmamos que $M_{k,l}(F)$ também é uma superálgebra simples. Para isto, imitamos o mesmo raciocínio que verifica a simplicidade de $M_n(F)$ como F-álgebra(Exemplo 1.20). Assim teremos que $M_{k,l}(F)$ é uma F-superálgebra simples.

Apresentaremos duas definições bastante importantes. Eles generalizam a definição de homomorfismo de F-álgebras e de isomorfismo de F-álgebras para F-superálgebras.

Definição 3.10. *Sejam A e B duas F-superálgebras e $\phi : A \to B$ um homomorfismo de F-álgebras. Dizemos que ϕ é um homomorfismo de F-superálgebras se $\phi(A^{(0)}) \subset B^{(0)}$ e $\phi(A^{(1)}) \subset B^{(1)}$.*

Definição 3.11. *Dizemos que $\phi : A \to B$ é um isomorfismo de F-superálgebras se ϕ é um isomorfismo de F-álgebras e $\phi(A^{(0)}) = B^{(0)}$ e $\phi(A^{(1)}) = B^{(1)}$.*

A seguir, veremos que as F-superálgebras simples dos três exemplos anteriores são duas a duas não isomorfas como F-superálgebras.

Proposição 3.12. *As F-superálgebras $M_n(F)$, $M_p(F \oplus cF)$ e $M_{k,l}(F)$ com as $\mathbb{Z}_2$-graduações sugeridas, respectivamente, pelos Exemplos 3.7,3.8 e 3.9 são duas a duas não isomorfas como F-superálgebras.*

Demonstração: Não é difícil ver que $M_n(F)$ não é isomorfa como superálgebra à $M_{k,l}(F)$ e à $M_p(F \oplus cF)$ já que não existe um isomorfismo ϕ de F-álgebras tal que $\phi(0) = M_{k,l}(F)^{(1)}$ ou $\phi(0) = cM_p(F)$. Além disso, $M_{k,l}(F)$ não é isomorfa a $M_p(F \oplus cF)$ como F-superálgebra. Se fosse, implicaria que $M_{k,l}(F)$ seria isomorfa a $M_p(F \oplus cF)$ como espaço vetorial. Ou seja, teríamos que $(k+l)^2 = 2p^2$. Mas isto é claramente impossível já que $\sqrt{2}$ é um número irracional. □

Com a definição de isomorfismo de superálgebras pode se verificar que as superálgebras $M_{k,l}(F)$ e $M_{k',l'}(F)$ são isomorfas se, e só se, $k = k'$ e $l = l'$.

A seguir, apresentaremos o teorema principal dessa subseção.

Teorema 3.13 (Teorema de Classificação)**.** *Seja A uma F-superálgebra simples de dimensão finita unitária, onde F é um corpo algebricamente fechado. Então A é isomorfa, como F-superálgebra, a uma das seguintes F-superálgebras: $M_n(F) = (M_n(F), 0)$, ou $M_{k,l}(F) = (M_{k,l}^{(0)}(F), M_{k,l}^{(1)}(F))$ onde $k \geq l > 0$, ou $M_n(F \oplus cF) = (M_n(F), cM_n(F))$.*

Demonstração: A demonstração desse teorema pode ser vista em [Gia-Zai4]. □

Para finalizar, enunciaremos a versão para F-superálgebras do Teorema de Wedderburn-Malcev. Esta versão é uma adaptação do Teorema de Wedderburn-Malcev (Teorema 1.29).

Teorema 3.14 (Teorema de Wedderburn-Malcev para superálgebras)**.** *Seja A uma F-superálgebra de dimensão finita. Então A pode ser decomposta como:*

$$A = B + J(A),$$

onde B é uma F-subálgebra maximal de A e $B = A_1 \odot \ldots \odot A_m$. Cada A_i é uma F-subálgebra simples com $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida de A; $J(A)$ é o radical de Jacobson de A e a sua $\mathbb{Z}_2$-graduação é induzida de A.

Observação 3.15. *Se considerarmos a F-álgebra A com a sua $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial, o teorema acima se reduz ao primeiro Teorema de Wedderburn-Malcev(Teorema 1.29).*

3.3 A envolvente de Grassmann

Nesta seção, veremos como construir novas F-superálgebras a partir do conceito da envolvente de Grassmann. O nosso objetivo é apresentar o Teorema da Envolvente de Grassmann e relacionarmos as F-superálgebras simples de dimensão finita dos Exemplos 3.7, 3.8 e 3.9 com os três tipos de F-álgebras que aparecem na classificação das variedades T-primas do Teorema 2.33.

Definição 3.16. *Dada uma F-superálgebra $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$, definimos a envolvente de Grassmann de A por:*

$$G(A) = (A^{(0)} \otimes \mathcal{G}^{(0)}) \oplus (A^{(1)} \otimes \mathcal{G}^{(1)}).$$

A envolvente de Grassmann, de início, parece uma maneira de obter uma nova superálgebra a partir de uma superálgebra A. Contudo, esse conceito é bastante importante devido ao seguinte teorema:

Teorema 3.17 (Teorema da Envolvente de Grassmann)**.** *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras não trivial e não total sobre um corpo F de característica zero. Então existe uma F-superálgebra de dimensão finita A tal que:*

$$\mathcal{V} = var(G(A)).$$

Demonstração: A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [Kemer3].

□

Observação 3.18. *No caso em que $\mathcal{V}$ é uma variedade trivial temos que $\mathcal{V}$ é gerada pela envolvente de Grassmann de* 0*, a qual é uma álgebra de dimensão nula.*

Exemplo 3.19. *Calcularemos as envolventes de Grassmann das F-álgebras discutidas nos Exemplos 3.7, 3.8 e 3.9.*

- $G(M_n(F)) = (M_n(F) \otimes \mathcal{G}^{(0)}) \oplus (\{0\} \otimes \mathcal{G}^{(1)}) = M_n(\mathcal{G}^{(0)}) \oplus \{0\} \cong M_n(\mathcal{G}^{(0)})$,
- $G(M_n(F \oplus cF)) = (M_n(F) \otimes \mathcal{G}^{(0)}) \oplus (cM_n(F) \otimes \mathcal{G}^{(1)}) \cong M_n(\mathcal{G})$,
- $G(M_{k,l}(F)) = (M_{k,l}^{(0)} \otimes \mathcal{G}^{(0)}) \oplus (M_{k,l}^{(1)} \otimes \mathcal{G}^{(1)}) \cong M_{k,l}(\mathcal{G})$.

Observação 3.20. *Doravante, por simplicidade, substituíremos* ($\cong$) *por* ($=$) *nos termos acima. Assim, teremos:*

$$G(M_n(F)) = M_n(\mathcal{G}^{(0)}), G(M_n(F \oplus cF)) = M_n(\mathcal{G}) \text{ e } G(M_{k,l}(F)) = M_{k,l}(\mathcal{G}).$$

Como foi comentado no Teorema 2.33, Kemer classificou as variedades T-primas como sendo as seguintes:

$$\mathcal{V} = var(M_n(F)), \text{ ou } \mathcal{V} = var(M_n(\mathcal{G})) \text{ ou } \mathcal{V} = var(M_{k,l}(\mathcal{G})).$$

Com as informações do Exemplo 3.19, observamos que:

Observação 3.21.

$G(M_n(F))$ *gera a primeira variedade T-prima.*

$G(M_n(F \oplus cF))$ *gera a segunda variedade T-prima.*

$G(M_{k,l}(F))$ *gera a última variedade T-prima.*

Capítulo 4

PI-Expoente

O primeiro objetivo desse capítulo é definir o PI-expoente e fornecer uma maneira para calculá-lo. Isto será feito com o Teorema do PI-Expoente. Com o Teorema do PI-Expoente de Kemer caracterizaremos as variedades de PI-Expoente menor ou igual a 1. O Teorema Fundamental de Giambruno e Zaicev, ou simplesmente Teorema Fundamental, irá caracterizar as variedades de PI-expoente maior que 2. Com o Teorema Fundamental e o Teorema do PI-Expoente de Kemer, classificaremos as variedades de PI-expoente 2 que é o objetivo central dessa dissertação. Por último, faremos uma apresentação sucinta sobre variedades minimais de PI-expoente maior que 2.

4.1 O Teorema do PI-Expoente

Na Seção 2.5, provamos o célebre Teorema das Codimensões de Regev que afirma o seguinte: se uma F-álgebra A satisfaz a uma identidade de grau $d \geq 1$ então $c_n(A) \leq (d-1)^{2n}$.

Dessa maneira, se A é uma PI-álgebra, existe uma constante $a \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que:

$$0 \leq c_n(A) \leq a^n.$$

Observemos que a sequência $\{\sqrt[n]{c_n(A)}\}_{n\geq 1}$ é limitada. Pelo Teorema de Bolzano e Weirstrass, $\limsup\{\sqrt[n]{c_n(A)}\}_{n\geq 1}$ e $\liminf\{\sqrt[n]{c_n(A)}\}_{n\geq 1}$ existem e são números reais. Logo para uma PI-álgebra A, é possível definir:

Definição 4.1.

$$\overline{exp}(A) := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)};$$
$$\underline{exp}(A) := \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}.$$

Caso $\overline{exp}(A) = \underline{exp}(A)$, *temos que* $\{\sqrt[n]{c_n(A)}\}_{n\geq 1}$ *possui limite e definimos o PI-expoente de* A *por:*

$$exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}.$$

Notemos que se A *é uma* F*-álgebra que não é uma PI-álgebra então* $exp(A)$ *não é um número real, já que:*

$$\overline{exp}(A) = \underline{exp}(A) = \infty.$$

No caso em que $\mathcal{V} = var(A)$ *é uma variedade de álgebras sobre* F*, definimos:*

$$exp(\mathcal{V}) := exp(A).$$

Destacaremos três exemplos para fixar as idéias.

Exemplo 4.2. *Se* $\mathcal{V}$ *é uma variedade trivial então sabemos que* $\mathcal{V} = var(0)$*. Em particular,* $c_n(\mathcal{V}) = c_n(0) = 0, \forall n \geq 1$*. Logo* $exp(\mathcal{V}) = 0$*.*

Exemplo 4.3. *Se* A *é uma* F*-álgebra nilpotente de expoente* m*, então*

$$(c_n(A))_{n\geq m} = 0.$$

Logo, não é difícil ver que $exp(A)$ *existe é igual a zero.*

Exemplo 4.4. *Considere as álgebras* $\mathcal{G}$ *e* $UT_2(F)$*. Como sabemos:*

$$(c_n(UT_2(F)))_{n\geq 1} = 2^{n-1}(n-2) + 2 \quad e \quad (c_n(\mathcal{G}))_{n\geq 1} = 2^{n-1}.$$

Notemos que $exp(UT_2(F))$ *e* $exp(\mathcal{G})$ *existem e são números inteiros positivos já que:*

$$exp(UT_2(F)) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{n-1}(n-2)+2} = 2;$$

$$exp(\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{n-1}} = 2.$$

Na década de 1980, Amitsur conjecturou que o PI-expoente de uma PI-álgebra existia e era um inteiro não negativo. Somente no final da década passada, em 1999, Giambruno e Zaicev([Gia-Zai1] e [Gia-Zai2]) verificaram a conjectura de Amitsur no caso em que F é um corpo de característica zero.

A seguir, apresentaremos os principais resultados obtidos por estes dois PI-algebristas nestes artigos que permitiram verificar a conjectura de Amitsur para esse caso particular.

Considere uma F-superálgebra A de dimensão finita. Pelo Teorema de Wedderburn-Malcev(Teorema 3.14), sabemos que:

$$A = B + J(A),$$

onde B é uma subálgebra semi-simples maximal e $J(A)$ é o radical de Jacobson com $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida de A. Além disso, temos:

$$B = B_1 \odot B_2 \odot \cdots \odot B_n, \tag{4.1}$$

onde cada B_i é uma superálgebra simples com $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida de A.

Considere todos os produtos possíveis da forma:

$$B_{i_1} J(A) B_{i_2} J(A) \ldots J(A) B_{i_r} \neq \{0\}, \tag{4.2}$$

onde $B_{i_1}, \cdots, B_{i_r}$ são F-superálgebras simples distintas que aparecem na decomposição de B em (4.1). Seja:

$$a := max\ dim_F(B_{i_1} \oplus \cdots \oplus B_{i_r}), \tag{4.3}$$

a dimensão máxima entre todas as subálgebras semi-simples $B_{i_1} \odot \cdots \odot B_{i_r}$ que satisfazem a condição (4.2). Veremos que existe uma estreita conexão entre $exp(G(A))$ e o número a definido em (4.3), de acordo com o próximo resultado provado por Giambruno e Zaicev em 1999.

Teorema 4.5 (Teorema do PI-Expoente)**.** *Seja A uma F-superálgebra de dimensão finita, onde F é um corpo algebricamente fechado e de característica zero. Considere o inteiro $a \geq 0$ definido em (4.3). Então existem constantes $C_1, C_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tais que $C_1 > 0$ e*

$$C_1 n^{r_1} a^n \leq c_n(G(A)) \leq C_2 n^{r_2} a^n.$$

Em particular, temos

$$exp(G(A)) = a$$

Demonstração: A demonstração desse teorema é feita em [Gia-Zai1] e [Gia-Zai2].

□

No próximo corolário, verificaremos a conjectura de Amitsur. Além disso, veremos que a hipótese de F ser algebricamente fechado e de característica zero no teorema acima pode ser reduzida ao fato de F ter apenas característica zero.

Corolário 4.6. *Seja A uma PI-álgebra. Então existem constantes $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $C_1, C_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tais que $C_1 > 0$ e*

$$C_1 n^{r_1} a^n \leq c_n(A) \leq C_2 n^{r_2} a^n,$$

Consequentemente $exp(A)$ existe e é um inteiro não negativo.

Demonstração: Pela Proposição 2.39, sabemos que $c_n^F(A) = c_n^{\overline{F}}(A \otimes \overline{F})$ para todo $n \geq 1$, onde $\overline{F}$ é o fecho algébrico de F. Desta forma, podemos supor sem perda de generalidade que F é um corpo algebricamente fechado. Considere $\mathcal{V} = var(A)$. Pelo Teorema da Envolvente de Grassmann(Teorema 3.17) e pela Observação 3.18, sabemos que existe uma F-superálgebra de dimensão finita B tal que $var(A) = var(G(B))$, ou seja, $Id(A) = Id(G(B))$ e $c_n(G(B)) = c_n(A)$ para todo $n \geq 1$. Com este resultado e o Teorema do PI-Expoente, concluímos a nossa afirmação. □

Observação 4.7. *Como sabemos, toda F-álgebra A admite uma $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial, onde $A^{(0)} = A$ e $A^{(1)} = \{0\}$. Logo*

$$G(A) = A \otimes \mathcal{G}^{(0)} \oplus \{0\} \otimes \mathcal{G}^{(1)} = A \otimes \mathcal{G}^{(0)}.$$

Pela Proposição 2.21 temos que $Id(A) = Id(A \otimes \mathcal{G}^{(0)})$, pois F é um corpo de característica zero. Como consequência da última igualdade, segue que $exp(A) = exp(G(A))$ e desta forma, temos uma maneira de calcular o PI-expoente de A.

Se A é uma F-álgebra semi-simples unitária de dimensão finita então $J(A) = \{0\}$ e nesse caso se

$$A = A_1 \odot A_2 \odot \cdots \odot A_n$$

é a decomposição de A em F-álgebras simples então:

$$exp(A) = max\{dim_F(A_i), 1 \leq i \leq n\}.$$

Claramente se A é uma F-álgebra simples de dimensão finita unitária então $exp(A) = dim_F(A)$.

A seguir, calcularemos o PI-expoente das álgebras verbalmente primas do Teorema 2.33.

Exemplo 4.8.

- *Para calcular o PI-expoente de $M_n(F)$, basta recorrer a sua $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial. Como A é uma F-álgebra simples, segue da observação anterior que $exp(M_n(F)) = dim(M_n(F)) = n^2$.*

- *Para computar $exp(M_n(\mathcal{G}))$, lembremos que $M_n(\mathcal{G}) = G(M_n(F \oplus cF))$ onde $c^2 = 1$. Como $M_n(F \oplus cF)$ é uma F-superálgebra simples, segue do Teorema do PI-Expoente que $exp(G(M_n(F \oplus cF))) = 2n^2$.*

- *Para obter $exp(M_{k,l}(\mathcal{G}))$, recordemos que $G(M_{k,l}(F)) = M_{k,l}(\mathcal{G})$. Como $M_{k,l}(F)$ é uma F-álgebra simples, segue do Teorema do PI-Expoente que $exp(M_{k,l}(\mathcal{G})) = dim(M_{k,l}(F)) = (k + l)^2$.*

Além desse exemplo, o cálculo do PI-expoente de algumas PI-álgebras é bastante importante para essa dissertação.

Exemplo 4.9.

Considere a álgebra $UT_n(F)$. Como vimos no Exemplo 1.30, a decomposição de Wedderburn-Malcev dessa álgebra, onde $J(UT_n(F)) = UT_n(F)^N$, é a seguinte:

$$(A_{11} \odot A_{22} \odot \cdots \odot A_{nn}) + J(UT_n(F)), \tag{4.4}$$

onde $A_{ii} = \{aE_{ii} | a \in F\}$.

Um cálculo simples mostra que

$$A_{11}J(UT_n(F))A_{22}J(UT_n(F)) \ldots J(UT_n(F))A_{nn} \neq 0.$$

Logo

$$exp(UT_n(F)) = n.$$

Em particular, notamos que $exp(UT_3(F)) = 3$. A álgebra $UT_3(F)$ será bastante importante na caracterização das variedades de PI-expoente 2. Calculemos o PI-expoente de outras duas álgebras importantes nesta caracterização.

Exemplo 4.10. *Considere as seguintes PI-álgebras:*

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \mathcal{G} & \mathcal{G} \\ 0 & \mathcal{G}^{(0)} \end{pmatrix} \right\} \quad e \quad A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \mathcal{G}^{(0)} & \mathcal{G} \\ 0 & \mathcal{G} \end{pmatrix} \right\}$$

Para calcularmos $exp(A_1)$ e $exp(A_2)$, consideraremos as F-superálgebras B_1 e B_2, onde $c^2 = 1$:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} F + cF & F + cF \\ 0 & F \end{pmatrix} \right\} \quad e \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} F & F + cF \\ 0 & F + cF \end{pmatrix} \right\}$$

com as seguintes $\mathbb{Z}_2$-graduações, respectivamente:

$$B_1^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix} \right\} \quad e \quad B_1^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} cF & cF \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$
$$B_2^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix} \right\} \quad e \quad B_2^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & cF \\ 0 & cF \end{pmatrix} \right\}.$$

Notemos que $G(B_1) = A_1$ e que $G(B_2) = A_2$(as igualdades nesse contexto significam que $G(B_1) \cong A_1$ e $G(B_2) \cong A_2$). As decomposições de Wedderburn-Malcev de B_1 e de B_2 como superálgebras são, respectivamente:

$$\underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} F + cF & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}}_{C_1} \odot \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \right\}}_{C_2} + \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 0 & F + cF \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}}_{J(B_1)},$$

$$\underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}}_{D_1} \odot \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F + cF \end{pmatrix} \right\}}_{D_2} + \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 0 & F + cF \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}}_{J(B_2)},$$

onde C_i e D_i são superálgebras simples para todo $i \in \{1, 2\}$.

Temos que $C_1 J(B_1) C_2 \neq \{0\}$ e que $D_1 J(B_2) D_2 \neq \{0\}$. Logo: $exp(A_1) = dim_F(C_1 \oplus C_2) = 3$ e $exp(A_2) = dim_F(D_1 \oplus D_2) = 3$.

4.2 Caracterização das variedades de PI-expoente menor ou igual a 1

Nessa seção demonstraremos um resultado que permite verificar se $\mathcal{G}$ pertence a uma variedade de álgebras. Esse resultado servirá essencialmente para caracterizar as variedades de PI-expoente menor ou igual a 1.

4.2.1 Teorema Clássico de Kemer

Teorema 4.11 (Teorema Clássico de Kemer)**.** *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras sobre um corpo F de característica zero. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1) $\mathcal{G} \notin \mathcal{V}$.

2) *$\mathcal{V}$ é gerada por uma F-álgebra $\mathcal{A}$ de dimensão finita e unitária.*

3) *$\mathcal{V}$ satisfaz um polinômio standard.*

A demonstração desse teorema será feita em duas etapas. Na primeira provaremos que **2)** e **3)** são equivalentes e na segunda que **1)** e **3)** são equivalentes.

Primeira equivalência

Nesta subseção, mostraremos a primeira parte do Teorema 4.11.

Lema 4.12. *Seja A uma F-superálgebra de dimensão finita tal que $G(A)$ satisfaz um polinômio standard. Então o ideal gerado por $A^{(1)}$ é nilpotente.*

Demonstração: Considere $\overline{F}$ o fecho algébrico de F. Pela Observação 1.31, podemos considerar A e $\mathcal{G}$ como $\overline{F}$-álgebras, bastando para isto tomar $\overline{A} = A \otimes \overline{F}$ e $\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \otimes \overline{F}$,respectivamente. Pode-se verificar que $\overline{A}$ é uma superálgebra com a seguinte $\mathbb{Z}_2$-graduação $(A^{(0)} \otimes \overline{F}, A^{(1)} \otimes \overline{F})$. Imitando os argumentos da Proposição 2.21 é fácil ver que $G(A)$ satisfaz uma identidade standard se, e somente se, $\overline{G}(\overline{A})$ satisfaz uma identidade standard, onde

$$\overline{G}(\overline{A}) = ((A^{(0)} \otimes \overline{F}) \otimes (\mathcal{G}^{(0)} \otimes \overline{F})) \oplus ((A^{(1)} \otimes \overline{F}) \otimes (\mathcal{G}^{(1)} \otimes \overline{F})).$$

Além disso, pode se verificar que $A^{(1)}$ gera um ideal nilpotente se, e só se, $A^{(1)} \otimes \overline{F}$ gera um ideal nilpotente. Com estas duas equivalências, podemos supor que F é algebricamente fechado.

Se $A^{(1)} \subset J(A)$ não há nada para fazer. Suponhamos que $A^{(1)}$ não esteja contido em $J(A)$. Assim, temos que $(\frac{A}{J(A)})^{(1)} \neq 0$ e não é difícil ver que se $G(A)$ satisfaz um polinômio standard então o mesmo ocorre para $G(\frac{A}{J(A)})$. Dessa forma, $\frac{A}{J(A)}$ e A obedecem as mesmas hipóteses do lema e podemos supor, sem perda de generalidade, que $J(A) = \{0\}$ e $A^{(1)} \neq 0$. Pelo Teorema de Wedderburn-Malcev(Teorema 3.14), temos que A pode ser escrita como soma direta de F-superálgebras simples cada uma com $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida de A:

$$A = \bigodot_{i \in \gamma} A_i, \tag{4.5}$$

em que γ é um conjunto finito.

Sabemos pelo Teorema de Classificação(Teorema 3.13) que cada superálgebra simples A_i é isomorfa a uma das seguintes F-superálgebras:

$$M_n(F), \text{ ou } M_{k,l}(F) \text{ ou } M_n(F \oplus cF) \text{ onde } c^2 = 1.$$

Como $A^{(1)} \neq 0$, alguma F-superálgebra simples A_j de (4.5) é necessariamente isomorfa a $M_{k,l}(F)$ ou $M_n(F \oplus cF)$. No primeiro caso, A_j contém uma subálgebra isomorfa a:

$$F(E_{11} + E_{22}) \oplus F(E_{12} + E_{21}).$$

Assim, $G(A)$ contém uma subálgebra isomorfa a:

$$(F(E_{11} + E_{22}) \otimes \mathcal{G}^{(0)}) \oplus (F(E_{12} + E_{21}) \otimes \mathcal{G}^{(1)}). \tag{4.6}$$

A F-álgebra (4.6) é isomorfa a $\mathcal{G}$, pois a aplicação abaixo é um isomorfismo de F-álgebras:

$$\begin{cases} \alpha : \mathcal{G} \to (F(E_{11} + E_{22}) \otimes \mathcal{G}^{(0)}) \oplus (F(E_{12} + E_{21}) \otimes \mathcal{G}^{(1)}) \\ g^{(0)} + g^{(1)} \mapsto ((E_{11} + E_{22}) \otimes g^{(0)}) \oplus ((E_{12} + E_{21}) \otimes g^{(1)}) \end{cases}$$

No segundo caso, sabemos que A_j tem uma subálgebra isomorfa a $F \oplus cF$ e assim $G(A)$ contém uma subálgebra isomorfa a:

$$(F \otimes \mathcal{G}^{(0)}) \oplus (cF \otimes \mathcal{G}^{(1)}). \tag{4.7}$$

Notemos que a F-álgebra (4.7) é isomorfa a $\mathcal{G}$, pois a aplicação abaixo é um isomorfismo de álgebras:

$$\begin{cases} \beta : \mathcal{G} \to (F \otimes \mathcal{G}^{(0)}) \oplus (cF \otimes \mathcal{G}^{(1)}) \\ g^{(0)} + g^{(1)} \mapsto (1_F \otimes g^{(0)}) \oplus (c \otimes g^{(1)}). \end{cases}$$

Com estes dois casos, verificamos que $G(A)$ tem sempre uma F-subálgebra isomorfa a $\mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ não satisfaz nenhuma identidade standard, segue que $G(A)$ também não satisfaz. Essa conclusão mostra que é um absurdo supor que $A^{(1)}$ não está contido em $J(A)$. Assim o ideal gerado por $A^{(1)}$ é nilpotente. $\square$

Teorema 4.13. *Uma variedade de álgebras $\mathcal{V}$ é gerada por uma F-álgebra $\mathcal{A}$ de dimensão finita se, e somente se, $\mathcal{V}$ satisfaz uma identidade standard.*

Demonstração: O caso em que $\mathcal{V} = var(0)$ é imediato. Por isto, no prosseguimento desta demonstração, suporemos que $\mathcal{V}$ é não-trivial.

Suponhamos que $\mathcal{V} = var(A)$ para alguma F-álgebra arbitrária de dimensão finita A. Sabemos que $St_{dim(A)+1}$ é uma identidade de A, logo todas as F-álgebras de $\mathcal{V}$ satisfazem este polinômio standard e assim a primeira parte da teorema está provada.

Suponhamos que $\mathcal{V}$ satisfaça uma identidade standard. Pelo Teorema da Envolvente de Grassmann(Teorema 3.17), existe uma F-superálgebra de dimensão finita

A tal que $\mathcal{V} = var(G(A))$. Como A é uma F-superálgebra de dimensão finita e $G(A)$ satisfaz uma identidade standard, sabemos do Lema 4.12 que o ideal gerado por $A^{(1)}$ em A é nilpotente. Suponhamos que o seu expoente seja m. É fácil ver que $A^{(1)} \otimes \mathcal{G}^{(1)}$ também gera um ideal nilpotente em $G(A)$ de expoente m já que $a_1 \dots a_m \otimes g_1 \dots g_m = 0$, para quaisquer $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{G}^{(1)}$ e $a_1, \dots, a_m \in A^{(1)}$. Seja $B = \{a_1, \cdots, a_k\}$ uma base de $A^{(1)}$ e $t = max\{k, m\}$. Considere a F-álgebra C gerada por:

$$A^{(0)} \otimes 1 \text{ e } \{a_i \otimes e_j | 1 \leq i \leq k \text{ e } 1 \leq j \leq t\}.$$

Notemos que C é uma F-subálgebra unitária homogênea($C = C^{(0)} \oplus C^{(1)}$) de $G(A)$ cuja a dimensão é finita. Assim, C satisfaz a todas as identidades de $G(A)$. Se provarmos que $Id(C) = Id(G(A))$, teremos que $\mathcal{V} = var(C)$ o que prova a segunda parte do teorema.

Como T-ideais sobre corpos de característica zero são determinados por polinômios multilineares, podemos trabalhar com estes. Tome um polinômio multilinear f de grau n tal que $f \notin Id(G(A))$. Assim, existem $b_1, \cdots, b_s \in A^{(0)}$, $g_1, \cdots, g_s \in \mathcal{G}^{(0)}$, $a_{i_1}, \cdots, a_{i_{n-s}} \in B$ e $h_1, \cdots, h_{n-s} \in \mathcal{G}^{(1)}$ para os quais podemos assumir, a fim de simplificar a notação, que:

$$f(b_1 \otimes g_1, \cdots, b_s \otimes g_s, a_{i_1} \otimes h_1, \cdots, a_{i_{n-s}} \otimes h_{n-s}) \neq 0.$$

Observemos que é necessário que $n - s < m \leq t$, pois o ideal gerado $A^{(1)} \otimes \mathcal{G}^{(1)}$ tem expoente m em $G(A)$. Além disso, existe um polinômio multilinear f' tal que:

$$f(b_1 \otimes g_1, \cdots, b_s \otimes g_s, a_{i_1} \otimes h_1, \cdots, a_{i_{n-s}} \otimes h_{n-s}) =$$

$$f'(b_1, \cdots, b_s, a_{i_1}, \cdots, a_{i_{n-s}}) \otimes g_1 \cdots g_s h_1 \cdots h_{n-s}.$$

Notemos que $f'(b_1, \cdots, b_s, a_{i_1}, \cdots, a_{i_{n-s}})$ e $g_1 \cdots h_{n-s}$ são elementos não nulos de A e $\mathcal{G}$ respectivamente. Dessa forma, temos para $b_1 \otimes 1, \cdots, b_s \otimes 1 \in C^{(0)}$ e $a_{i_1} \otimes e_1, \cdots, a_{i_{n-s}} \otimes e_{i_{n-s}} \in C^{(1)}$:

$$f(b_1 \otimes 1, \cdots, b_s \otimes 1, a_{i_1} \otimes e_1, \cdots, a_{i_{n-s}} \otimes e_{i_{n-s}}) =$$

$$f'(b_1, \cdots, b_s, a_{i_1}, \cdots, a_{i_{n-s}}) \otimes e_{i_1} \cdots e_{i_{n-s}} \neq 0.$$

Ou seja, $f \notin Id(C)$, o que prova o resultado. □

Segunda equivalência

A segunda equivalência do Teorema 4.11 é mais trabalhosa. Para prová-la, precisamos estabelecer novos conceitos como o operador de alternância e os diagramas de Young tão importantes para o estudo das representações de S_n.

Em álgebra, o estudo da ação de um grupo sobre um conjunto é bastante importante. Em particular, o grupo simétrico de grau n age à esquerda sobre o espaço de polinômios multilineares de grau n:

$$P_n = span_F\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma_{(n)}} | \sigma \in S_n\}.$$

Ou seja, se $f(x_1, \cdots, x_n) \in P_n$ e $\alpha \in S_n$ então

$$\alpha f(x_1, \cdots, x_n) = f(x_{\alpha(1)}, \cdots, x_{\alpha(n)}).$$

Exemplo 4.14. *Considere o polinômio* $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1$ *e a permutação* $(12) \in S_3$. *Então* $(12)f(x_1, x_2, x_3) = x_2x_1x_3 + x_3x_1x_2$.

Um exemplo de uma ação menos trivial é o seguinte:

Exemplo 4.15. *Temos* $(\sum_{\sigma \in S_3} sgn(\sigma)\sigma)[[x_1, x_2], x_3] = 0$. *De fato, basta usar a identidade de Jacobi e ver que:*

$$[[x_1, x_2], x_3] - [[x_2, x_1], x_3] - [[x_3, x_2], x_1] - [[x_1, x_3], x_2] + [[x_2, x_3], x_1]$$

$$+[[x_3, x_1], x_2] = 2[[x_1, x_2], x_3] + 2[[x_2, x_3], x_1] + 2[[x_3, x_1], x_2] = 0.$$

A seguir apresentamos a definição de polinômios alternados.

Definição 4.16. *Seja* $f = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t) \in F\langle X\rangle$ *um polinômio linear em cada uma das variáveis* $x_1, \ldots, x_n$, *quer dizer, cada uma dessas variáveis aparece uma única vez em cada monômio de* f. *Dizemos que* f *é alternado nas variáveis* $x_1, \ldots, x_n$ *se, para quaisquer* $1 \leq i < j \leq n$, f *torna-se nulo quando substituímos* x_i *por* x_j.

Um polinômio que merece destaque é o polinômio standard de grau n. Ele é um dos exemplos mais simples de polinômio que é alternado em todas as suas variáveis. Neste caso, dizemos simplesmente que ele é alternado.

Definição 4.17. *Seja* $f(x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_k) \in F\langle X\rangle$ *linear nas variáveis* $x_1, \cdots, x_r$. *Definimos o operador de alternância* $A_{x_1,\cdots,x_r}$ *sobre as variáveis* $x_1, \cdots, x_r$ *da seguinte maneira:*

$$A_{x_1,\cdots,x_r} f(x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_k) = \sum_{\sigma \in S_r} sgn(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(r)}, y_1, \cdots, y_k).$$

Claramente ao aplicarmos o operador de alternância ao polinômio f, teremos um polinômio alternado nas variáveis $x_1, \cdots, x_r$.

Exemplo 4.18. *Considere o monômio* $x_1 \cdots x_m$.*É fácil ver que:*

$$A_{x_1,\cdots,x_m} x_1 \cdots x_m = St_m(x_1, \cdots, x_m).$$

Observação 4.19. *Se um monômio $x_{i_1} \dots x_{i_s} \dots x_{i_r} \dots x_{i_n}$ em um polinômio multilinear alternado tem coeficiente α então o monômio $x_{i_1} \dots x_{i_r} \dots x_{i_s} \dots x_{i_n}$ está em f e tem coeficiente igual a $-\alpha$.*

Proposição 4.20. *Seja $f(x_1, \cdots, x_m)$ um polinômio multilinear alternado de grau m, então $f = \alpha St_m$ para algum $\alpha \in F$.*

Demonstração: Se f é o polinômio nulo, tome $\alpha = 0$. Caso contrário, considere $x_{i_1} \cdots x_{i_m}$ um monômio não nulo de f. Suponhamos que o coeficiente deste monômio seja igual a α. Considere uma permutação $\sigma \in S_m$. Como sabemos, σ pode ser escrita como um produto de transposições, ou seja, $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$, em que cada τ_i é uma transposição. Suponhamos que $\tau_k = (rs)$ e consideremos o monômio $\tau_k(x_{i_1} \cdots x_{i_m})$. Pela Observação 4.19 o monômio $\tau_k(x_{i_1} \cdots x_{i_m})$ aparece em f e o seu coeficiente é igual a $(sgn(\tau_k))\alpha$. Aplicando o mesmo raciocínio ao monômio $\tau_k(x_{i_1} \cdots x_{i_m})$, concluímos que o monômio $(\tau_{k-1}\tau_k)(x_{i_1} \cdots x_{i_m})$ aparece em f e o seu coeficiente é igual a $(sgn(\tau_{k-1}\tau_k))\alpha$. Um processo indutivo simples, mostra que o monômio $\sigma(x_{i_1} \cdots x_{i_m})$ aparece em f e o seu coeficiente é igual a $(sgn(\sigma))\alpha$, ou seja, todos os monômios $x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m)}$ aparecem em f com coeficiente $sgn(\sigma)\alpha, \forall \sigma \in S_n$. E assim, temos que:

$$f = \alpha . St(x_{i_1}, \cdots, x_{i_m}).$$

□

Proposição 4.21. *Seja o polinômio $f(x_1, \cdots, x_{2k}) = [x_1, x_2] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}]$. Então:*

$$A_{x_1, \cdots, x_{2k}} f(x_1, \cdots, x_{2k}) = 2^k St_{2k}(x_1, \cdots, x_{2k}).$$

Demonstração: Observemos que o polinômio:

$$g(x_1, \cdots, x_{2k}) = A_{x_1, \cdots, x_{2k}} f(x_1, \cdots, x_{2k})$$

é multilinear de grau $2k$ e alternado. Pela Proposição 4.20, sabemos que existe $\alpha \in F$ tal que:

$$g(x_1, \cdots, x_{2k}) = \alpha St_{2k}(x_1, \cdots, x_{2k}).$$

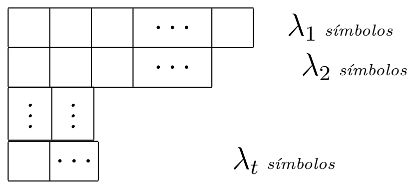
Para determinarmos o valor de α, iremos computar o valor do coeficiente de $x_1 \cdots x_{2k}$ em $g(x_1, \cdots, x_{2k})$. Notemos que o termo $x_1 \dots x_{2k}$ é obtido a partir do produto de comutadores onde o comutador da posição i é da forma $[x_{2i-1}, x_{2i}]$ ou $[x_{2i}, x_{2i-1}]$ com $1 \leq i \leq k$. Portanto, temos para cada comutador de peso 2 duas opções. Observemos ainda, que o sinal que antecede cada termo $x_1 \dots x_{2k}$ em $g(x_1, \dots, x_k)$ é sempre igual a 1. Logo $\alpha = 2^k$. □

Os diagramas de Young formam uma ferramenta poderosa no estudo das representações de S_n.Como sabemos,toda permutação de S_n pode ser escrita como o produto de ciclos disjuntos e duas permutações de S_n são conjugadas se, e somente se, estas têm a mesma estrutura cíclica. Quando um corpo F tem característica zero e é algebricamente fechado, um importante resultado garante que o número de representações irredutíveis de um grupo finito é igual ao número de classes de conjugação deste. Para maiores detalhes deste último resultado, o leitor pode consultar [Jam-Lie].

Definição 4.22. *Uma partição de um inteiro positivo n é uma coleção de inteiros positivos $\lambda_1, \cdots, \lambda_t$ em que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_t$ e $n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_t$.Simbolicamente, denotaremos esta partição como $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_t)$ e escreveremos $\lambda \vdash n$ quando nos referirmos a λ como uma partição de n.*

Definição 4.23. *Dada uma partição $\lambda \vdash n$, definimos o diagrama de Young associado à λ, o qual denotamos por D_λ,como o conjunto formado por n boxes $\square$ dispostos da seguinte maneira: cada linha i do diagrama será composto por λ_i boxes.*

D_λ :



Observemos que os comprimentos das colunas de D_λ formam uma partição de n a qual denominamos de partição conjugada associada a λ.

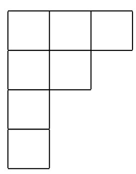
Definição 4.24. *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ uma partição n e $\widehat{m} = \{1, \ldots, m\}$. Definimos por $\lambda' = (\lambda'_1, \cdots, \lambda'_r)$ a partição conjugada associada à λ onde:*

$$\lambda'_i = \sum_{\nu \in \widehat{m},\ \lambda_\nu \geq i} 1.$$

Observemos que o diagrama de Young $D_{\lambda'}$ de λ' é obtido de D_λ trocando as linhas pelas colunas. A seguir, destacaremos um exemplo para fixar os conceitos apresentados.

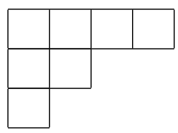
Exemplo 4.25. *Se $\lambda = (3, 2, 1, 1)$ então $\lambda' = (4, 2, 1)$. Além disso, os diagramas de Young associados a essas partições são, respectivamente:*

D_λ :



e

$D_{\lambda'}$:



Definição 4.26. *Uma tabela de Young do tipo λ, a qual designaremos pelo símbolo T_λ, é dada a partir do preenchimento dos boxes do diagrama de Young D_λ por inteiros distintos entre 1 e n. Note que para cada partição de n, temos um diagrama de Young. E, para cada diagrama, temos $n!$ tabelas.*

Veremos a seguir uma tabela de Young associada à partição $\lambda = (3^2, 1^2)$.

Exemplo 4.27.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & 1 & 4 \\ \hline 8 & 3 & 2 \\ \hline 7 \\ \cline{1-1} 6 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Definiremos agora subgrupos associados a uma tabela T_λ do tipo

$$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_t).$$

Para isso, escreveremos $T_\lambda = D_\lambda(a_{i,j})$, onde $a_{i,j}$ é um natural entre 1 e n que ocupa o box que está na i-ésima linha e na j-ésima coluna.

Considere $S_k(b_1, \cdots, b_k)$ o subgrupo de S_n de permutações de

$$B = \{b_1, \cdots, b_k\}$$

se $k \leq n$ e $1 \leq b_1 < \ldots < b_k \leq n$. Obtemos assim, a partir das linhas de T_λ, um subgrupo de S_n denotado por R_{T_λ} e dito grupo horizontal de T_λ:

$$R_{T_\lambda} := S_{\lambda_1}(a_{11}, \cdots, a_{1\lambda_1}) \times \cdots \times S_{\lambda_t}(a_{t1}, \cdots, a_{t\lambda_t}).$$

Assim os elementos de R_{T_λ} serão as permutações-linha de T_λ.

Analogamente, definimos um subgrupo de S_n a partir das colunas de T_λ, que será denotado por C_{T_λ} e chamado de grupo vertical de T_λ. Seus elementos serão as permutações-coluna de T_λ:

$$C_{T_\lambda} := S_{\lambda'_1}(a_{11}, \cdots, a_{\lambda'_1 1}) \times \cdots \times S_{\lambda'_r}(a_{1r}, \cdots, a_{\lambda'_r r}),$$

onde $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_r)$ é a partição conjugada associada à λ.

Para nos familiarizarmos com as definições de permutações-linha e permutações-coluna, consideremos $\lambda = (2, 1) \vdash 3$ e a seguinte tabela de Young associada a este diagrama:

Exemplo 4.28.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Para este caso, temos:

$$R_{T_\lambda} = S_{\lambda_1}(1, 2) \times S_{\lambda_2}(3) = \{1_{S_3}, (12)\} \times 1_{S_3} \cong \{1_{S_3}, (12)\} \leq S_3,$$

$$C_{T_\lambda} = S_{\lambda'_1}(2, 3) \times S_{\lambda'_2}(1) = \{1_{S_3}, (23)\} \times 1_{S_3} \cong \{1_{S_3}, (23)\} \leq S_3.$$

A seguir definiremos um importante elemento da álgebra de grupo FS_n. Ele será fundamental para a demonstração de um lema mais adiante.

Definição 4.29. *Dada uma tabela de Young T_λ, definimos o idempotente essencial associado a T_λ como:*

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\rho \in R_{T_\lambda} \quad \sigma \in C_{T_\lambda}} (sgn\sigma)\rho\sigma.$$

Como exemplo, calculemos o idempotente essencial para dois casos. O primeiro para uma tabela da partição $\lambda \vdash (2,1)$ e o segundo para uma tabela da partição $\lambda \vdash (1^k)$.

Exemplo 4.30.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \quad e \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline k \\ \hline \end{array}$$

Para o primeiro caso, sabemos que:

$$R_{T_\lambda} = \{(12), 1_{S_3}\}$$

$$C_{T_\lambda} = \{(23), 1_{S_3}\}$$

Logo:

$$e_{T_\lambda} = 1_{S_3} - 1_{S_3}(23) + (12).1_{S_3} - (12)(23) = 1_{S_3} - (23) + (12) - (123).$$

Para o segundo caso, notemos que a única permutação possível sobre as linhas do diagrama é dada pela identidade e, sobre as colunas, temos o grupo simétrico S_k. Assim:

$$e_{(1^k)} = \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma)\sigma.$$

A seguir apresentaremos duas observações que serão úteis para a demonstração do próximo lema.

Observação 4.31. *Sejam $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X \rangle$ um polinômio multilinear de grau n e σ uma permutação de S_n. A ação de σ à esquerda de f, por definição, renomeia as suas variáveis. Como sabemos $\mathcal{A}_{x_1,\ldots,x_n} f$ é um polinômio multilinear alternado de grau n e pela Proposição 4.20 existe $\alpha \in F$ tal que*

$$\mathcal{A}_{x_1,\ldots,x_n} f = \alpha St_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Por simplicidade, suponhamos que α seja igual a 1 e que o sinal que antecede o monômio $x_1 \ldots x_n$ de $\mathcal{A}_{x_1,\ldots,x_n} f$ seja positivo. Sendo assim, para calcularmos o sinal do monômio $x_{i_1} \ldots x_{i_n}$ de $\mathcal{A}_{x_1,\ldots,x_n} f$, temos que saber o sinal da permutação $\pi \in S_n$ tal que $\pi(x_1 \ldots x_n) = x_{i_1} \ldots x_{i_n}$. Podemos fazer isto, decompondo π no produto de transposições. Escrevendo $\pi = (\pi_1) \ldots (\pi_k)$, onde cada π_i é uma transposição, temos que o sinal que antecede $x_{i_1} \ldots x_{i_n}$ é igual a $(-1)^k$.

Essa idéia será bastante útil nos cálculos feitos no Lema 4.33.

Observação 4.32. *Note que a ação de* $e_{(1^k)}$ *em um polinômio multilinear* $f = f(x_1, \ldots, x_k)$ *não sofre, a menos de um escalar, interferência da ordenação das variáveis, pois:*

$$e_{(1^k)} f(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(k)}) = \sum_{\sigma \in S_k} (sgn(\sigma))\sigma\pi f(x_1, \ldots, x_k) =$$

$$(sgn(\pi)) \sum_{\theta \in S_k} (sgn(\theta))\theta f(x_1, \ldots, x_k) = sgn(\pi) e_{(1^k)} f(x_1, \ldots, x_k),$$

onde $\theta = \sigma\pi$.

Os próximos três resultados são lemas importantes para a demonstração da segunda equivalência. O primeiro generaliza o Exemplo 4.15. Os outros dois são lemas técnicos envolvendo cálculo de comutadores e permutações de S_n.

Lema 4.33. *Sejam* $r + l + 1 = k$ *e* $\{i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_l, t\} = \{1, 2, \ldots, k\}$. *Então*

$$e_{(1^k)}[[x_{i_1} \ldots x_{i_r}, x_{j_1} \ldots x_{j_l}], x_t] = 0 \tag{4.8}$$

em $F\langle X \rangle$.

Demonstração: Pela Observação 4.32, é suficiente demonstrar este teorema para o caso em que $i_1 = 1, \ldots i_r = r$, $j_1 = r + 1, \ldots, j_l = k - 1$ e $t = k$. Calculemos $[[x_1 \ldots x_r, x_{r+1} \ldots x_{k-1}], x_k]$:

$$\begin{aligned}[][[x_1 \ldots x_r, x_{r+1} \ldots x_{k-1}], x_k] &= x_1 \ldots x_k - x_k x_1 \ldots x_{k-1} \\ &+ x_k x_{r+1} \ldots x_{k-1} x_1 \ldots x_r - x_{r+1} \ldots x_{k-1} x_1 \ldots x_r x_k.\end{aligned}$$

Para efeitos de simplicação, denotaremos:

$$A := x_1 \ldots x_k;$$

$$B := -x_{r+1} \ldots x_{k-1} x_1 \ldots x_r x_k;$$

$$C := -x_k x_1 \ldots x_{k-1};$$

$$D := x_k x_{r+1} \ldots x_{k-1} x_1 \ldots x_r.$$

Como $e_{(1^k)}$ é um operador de alternância sobre as k variáveis de $(A + B + C + D)$, temos pela Proposição 4.20 que:

$$e_{(1^k)}[[x_1 \ldots x_r, x_{r+1} \ldots x_{k-1}], x_k] = \alpha St_k.$$

Dessa forma, o problema se reduz a trabalhar com o polinômio standard de grau k. Assim, temos:

$$e_{(1^k)}[[x_1 \dots x_r, x_{r+1} \dots x_{k-1}], x_k] = e_{(1^k)}A + e_{(1^k)}B + e_{(1^k)}C + e_{(1^k)}D.$$

Denotemos por α_A, α_B, α_C e α_D os coeficientes de $x_1 \dots x_k$ em

$$e_{(1^k)}A, e_{(1^k)}B, e_{(1^k)}C \text{ e } e_{(1^k)}D \text{ respectivamente.} \tag{4.9}$$

Temos $\alpha = \alpha_A + \alpha_B + \alpha_C + \alpha_D$. O nosso objetivo é provar que $\alpha = 0$. Para isto considere $p = k - 1 - r$.

O coeficiente α_A é 1. Para computar os demais coeficientes usaremos as idéias da Observação 4.31. Por um abuso de linguagem, faremos transposições sucessivas das variáveis, em cada dos três últimos casos de (4.9). Esse argumento de transposições sucessivas de variáveis, o qual está relacionado com ação à direita do grupo simétrico no espaço dos polinômios multilineares, é diferente da definição da ação à esquerda do grupo simétrico no espaço dos polinômios multilineares, a qual como sabemos, renomeia as variáveis. Contudo, é fácil ver, que o valor dos coeficientes α_B, α_C e α_D, calculados por este processo de transposição, serão os valores certos.

Para calcular α_B transpomos x_{k-1} sucessivamente até que este fique entre x_r e x_k. Repetimos o mesmo processo para x_{k-2}. O objetivo é que ele fique entre x_r e x_{k-1}. Depois de transpormos esses dois termos, transpomos todos os termos de x_{k-3} a x_{r+1}, respeitando a mesma linha de raciocínio. No total, serão rp transposições. Para obter o coeficiente α_C transpomos somente x_k de forma que ele fique após o termo x_{k-1}. No total, serão $k-1$ transposições. Para calcular o coeficiente α_D, dividiremos o cálculo em duas etapas. Na primeira, transpomos de x_{k-1} até o termo x_{r+1} como foi feito para calcular α_B. Feito isso, transpomos x_k, imitando o que foi feito para calcular α_C. No total, serão $rp + k - 1$ transposições.

Dessa forma, temos:

$$\alpha_A = 1,\ \alpha_B = -(-1)^{rp},\ \alpha_C = -(-1)^{k-1},\ \alpha_D = (-1)^{rp}(-1)^{k-1}.$$

Assim:

$$\alpha = 1 - (-1)^{rp} - (-1)^{r+p} + (-1)^{rp}(-1)^{r+p} = (1 - (-1)^{rp})(1 - (-1)^{r+p}).$$

Se r for par ou p for par, então $(1 - (-1)^{rp}) = 0$. Se r e p forem ambos ímpares temos que $(1 - (-1)^{r+p}) = 0$ e o lema está provado. □

Lema 4.34. *Sejam p, q, a e b polinômios de $F\langle X\rangle$, então:*

$$[[p, q], ab] = [[p, q], a]b + a[[p, q], b].$$

Demonstração: O cálculo é direto.

$$[[p, q], a]b + a[[p, q], b] = [p, q]ab - a[p, q]b + a[p, q]b - ba[p, q] = [[p, q], ab].$$

□

Observação 4.35. *Sempre que estivermos trabalhando com consequências de polinômios da forma*

$$[[p,q], x_{i_1}\dots x_{i_s}],$$

o lema anterior nos informa que podemos considerar o monômio $x_{i_1}\dots x_{i_s}$ como uma das variáveis x_{i_j}.

Lema 4.36. *Sejam $B = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ e $A = \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $B \subset A$. Considere o subgrupo $P_{i_1,\dots,i_k} \subset S_n$ que permuta os elementos de B e fixa os elementos de $A - B$. Considere:*

$$e = \sum_{\sigma \in P_{i_1,\dots,i_k}} sgn(\sigma)\sigma.$$

Então existe $c \in FS_n$ tal que $ce = e_{(1^n)}$.

Demonstração: Suponhamos sem perda de generalidade que:

$$i_l = l, \quad \forall\, l \in \{1, \dots, k\}.$$

Para os nossos propósitos é suficiente provar o caso em que $k = n-1$. A situação geral segue por recursividade. Seja c o seguinte elemento de FS_n:

$$c = 1 - (1\ \ k+1) - (2\ \ k+1) - \dots - (k\ \ k+1).$$

Afirmamos que c é o elemento desejado. Notemos que c é constituído pela soma de n permutações distintas de S_n e que o elemento e é formado pela soma de $(n-1)!$ permutações distintas de S_n. O nosso primeiro objetivo será provar que ce é constituído pela soma de $n!$ permutações distintas em S_n. Notemos que se $(i\ \ k+1) \neq (j\ \ k+1)$, então para quaisquer permutações σ_m e σ_p entre aquelas que formam a soma de e, temos que:

$$\sigma_m \neq \pm(i\ \ k+1)(j\ \ k+1)\sigma_p. \tag{4.10}$$

Isto ocorre porque o lado esquerdo de (4.10) fixa $k+1$, enquanto o lado direito envia $k+1$ em j.Caso tivéssemos $(i\ \ k+1) = (j\ \ k+1)$ em (4.10), acarretaria que $\sigma_m = \sigma_p$. Assim, existem $(n! - (n-1)!)$ termos distintos em ce que movem $k+1$. Além disso, não é difícil notar que existem $(n-1)!$ termos distintos em ce que não movem $k+1$. Como o sinal que antecede cada permutação β na soma de e é justamente $sgn(\beta)$, vamos ter que cada elemento de ce será formado pela soma das permutações de S_n, cada uma delas antecedidas pelo seu sinal. Assim, temos que:

$$ce = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\sigma.$$

□

Agora estamos em condição de provar a segunda equivalência.

Teorema 4.37. *Uma variedade $\mathcal{V}$ satisfaz uma identidade standard se, e somente se, $\mathcal{G} \notin \mathcal{V}$.*

Demonstração: Suponhamos que $\mathcal{V}$ satisfaça a uma identidade standard. Sabemos que $\mathcal{G}$ é gerada como álgebra por $1, e_1, \ldots, e_n, \ldots$ sujeitos a condição $e_ie_j = -e_je_i$. Assim, desde que $St_m(e_1, \ldots, e_m) = m!e_1 \ldots e_m$, segue que $\mathcal{G}$ não satisfaz uma identidade standard e portanto $\mathcal{G} \notin \mathcal{V}$.

Suponha que $\mathcal{G} \notin \mathcal{V}$. Deste modo, $Id(\mathcal{G})$ não contém $Id(\mathcal{V})$. Logo, podemos supor que existe um polinômio multilinear $f(x_1, \ldots, x_n)$ que pertence a $Id(\mathcal{V})$, mas que não pertence a $Id(\mathcal{G})$. Por outro lado, sabemos pelo Teorema 2.41 que qualquer elemento de $Id(\mathcal{G})$ é consequência de polinômios do tipo:

$$u[[p, q], r]v. \tag{4.11}$$

Pelo Lema 4.34, podemos identificar qualquer elemento de $Id(\mathcal{G})$ como uma combinação linear de elementos da forma:

$$u[[x_{i_1} \ldots x_{i_k}, x_{j_1} \ldots x_{j_l}], x_r]v. \tag{4.12}$$

Sabemos também pelo Teorema 2.41 que qualquer polinômio multilinear de grau n é gerado módulo $P_n \cap Id(\mathcal{G})$ como combinação linear de elementos do tipo:

$$x_{i_1} \ldots x_{i_k}[x_{j_1}, x_{j_2}] \ldots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}], \tag{4.13}$$

cuja a ordenação é dada por:

$$i_1 < \ldots < i_k,\ j_1 < j_2 < \ldots < j_{2m},\ 2m + k = n. \tag{4.14}$$

Desde que $f \in P_n \cap Id(\mathcal{V}) \setminus Id(\mathcal{G})$, podemos escrever f como uma combinação linear de polinômios dos tipos (4.12) e (4.13), onde pelo menos um dos coeficientes dos polinômios do tipo (4.13) é não nulo. Podemos supor sem perda de generalidade que este polinômio seja do tipo:

$$x_1 \ldots x_k[x_{k+1}, x_{k+2}] \ldots [x_{n-1}, x_n],$$

com k o número máximo de variáveis fora dos comutadores. Considere o seguinte endomorfismo:

$$\begin{cases} \phi : x_i \mapsto [x_i, y_i] \text{ se } 1 \leq i \leq k \\ \phi : x_j \mapsto x_j \text{ se } k + 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Notemos que $\phi(Id(\mathcal{G})) \subset Id(\mathcal{G})$. Em relação aos elementos do tipo (4.13) que obedecem a condição (4.14), com exceção daquele em que $i_1 = 1, \ldots, i_k = k$ e $j_1 = k + 1, \ldots, j_{2m} = n$,todos são enviados em $Id(\mathcal{G})$ quando aplicamos o endomorfismo ϕ. Assim, ao aplicarmos ϕ no polinômio f, obtemos uma nova identidade de $Id(\mathcal{V})$:

$$g = [x_1, y_1] \ldots [x_k, y_k][x_{k+1}, x_{k+2}] \ldots [x_{n-1}, x_n] + h,$$

onde h é um polinômio multilinear que é combinação linear de elementos de $Id(\mathcal{G})$. Renomeando as variáveis de g, temos:

$$g = [x_1, x_2] \cdots [x_{2q-1}, x_{2q}] + h,$$

onde $h \in P_{2q} \cap Id(\mathcal{G})$.

Notemos que os polinômios que constituem h são do tipo:

$$w := a[[x_{i_1} \dots x_{i_k}, x_{j_1} \dots x_{j_l}], x_r]b.$$

Sejam $A = \{i_1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_l, r\}$ e $B = \{1, \cdots, 2q\}$ tal que $A \subset B$ e C o subgrupo de S_{2q} formado por todas as permutações que fixam os elementos de $B - A$. Considere o seguinte elemento de FS_{2q}:

$$e = \sum_{\sigma \in C} sgn(\sigma)\sigma.$$

Pelo Lema 4.36, existe $c \in FS_{2q}$ tal que $ce = e_{(1^{2q})}$.

Observando as variáveis em w, segue pelo Lema 4.33 que $e_{(1^{2q})}w = ce(w) = 0$.

Desde que $e_{(1^{2q})}$ é um operador de alternância nas primeiras $2q$ variáveis, então a Proposição 4.21 nos informa que:

$$e_{(1^{2q})}[x_1, x_2] \dots [x_{2q-1}, x_{2q}] = 2^q St_{2q}.$$

Dessa forma, temos pelo Lema 4.33:

$$\frac{1}{2^q} e_{(1^{2q})} g = \frac{1}{2^q} e_{(1^{2q})}[x_1, x_2] \dots [x_{2q-1}, x_{2q}] = St_{2q}.$$

Ou seja, St_{2q} é uma identidade de $\mathcal{V}$ e isto prova o teorema. □

Diante do exposto, os Teoremas 4.13 e 4.37 apresentam uma prova para o Lema 4.11.

4.2.2 Teorema do PI-Expoente de Kemer

Nesta subseção provaremos um dos teorema clássicos de Kemer que classifica as variedades de PI-expoente menor ou igual 1. A demonstração apresentada a seguir recorre ao Teorema Clássico de Kemer(Teorema 4.11) e ao Teorema do PI-Expoente(Teorema 4.5).

Teorema 4.38 (Teorema do PI-Expoente de Kemer, 1979)**.** *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebra sobre um corpo F de característica zero. Temos que $exp(\mathcal{V}) \leq 1$ se, e somente se, $UT_2(F)$ e $\mathcal{G}$ não pertencem a $\mathcal{V}$.*

Demonstração:

O caso em que $\mathcal{V} = var(0)$ é imediato. Nos concentremos no caso em que $\mathcal{V}$ é não trivial.

Suponhamos que $exp(\mathcal{V}) \leq 1$. Como sabemos do Exemplo 4.4, vale:

$$exp(UT_2(F)) = 2;$$

$$exp(\mathcal{G}) = 2.$$

Assim, claramente $\mathcal{G}$ e $UT_2(F)$ não pertencem a $\mathcal{V}$. A primeira parte do teorema está provada.

Reciprocamente, pelo Teorema 4.11, temos que $\mathcal{V} = var(A)$ para alguma F-álgebra de dimensão finita unitária A, pois $\mathcal{G} \notin \mathcal{V}$. Pela Proposição 2.21, podemos supor que F é algebricamente fechado, já que $c_n^{\overline{F}}(A \otimes \overline{F}) = c_n^F(A)$ $\forall n \geq 1$, onde $\overline{F}$ é o fecho algébrico de F.

Pelo Teorema de Wedderburn-Malcev(Teorema 1.29), sabemos que A se escreve como:

$$A = A_1 \odot \ldots \odot A_m + J(A).$$

onde cada A_i é uma F-álgebra simples. Pelo Teorema de Wedderburn-Artin(Teorema 1.25), temos que:

$$A_i \cong M_{n_i}(F) \quad 1 \leq i \leq m.$$

Se algum $n_i > 1$, segue que A contém uma F-subálgebra isomorfa a $UT_2(F)$. Por hipótese, isto não é possível, logo é necessário que $n_1 = \cdots = n_m = 1$. Assim:

$$A_1 \cong A_2 \cong \cdots \cong A_m \cong F.$$

Para provar que $exp(\mathcal{V}) \leq 1$, usaremos o fato apresentado na Observação 4.7 que $exp(G(A)) = exp(A)$ quando consideramos A como superálgebra de $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial. Sendo assim, verificaremos que:

$$A_i J(A) A_k = 0 \; \forall i, k \in \{1, \cdots, m\}, \quad \text{com} \quad i \neq k.$$

Suponhamos, por absurdo que existem A_i e A_k, com $i \neq k$, tais que $A_i J(A) A_k \neq 0$. Por simplicidade de notação, assuma que $A_1 J(A) A_2 \neq 0$. Dessa forma, existe $j \in J(A)$ tal que $1_{A_1} j 1_{A_2} \neq 0$. Notemos que $1_{A_1}, 1_{A_2}$ e $1_{A_1} j 1_{A_2}$ são linearmente independentes já que $1_{A_1} 1_{A_2} = 1_{A_2} 1_{A_1} = 0$. Seja B a seguinte F-subálgebra de A:

$$B := span_F\{1_{A_1}, 1_{A_2}, 1_{A_1} j 1_{A_2}\}.$$

Notemos que $dim(B) = dim(UT_2(F)) = 3$. Consideremos o seguinte homomorfismo de F-álgebras:

$$\begin{cases} \phi : B \to UT_2(F) \\ 1_{A_1} \mapsto E_{11} \\ 1_{A_2} \mapsto E_{22} \\ 1_{A_1} j 1_{A_2} \mapsto E_{12} \end{cases}$$

Observemos que ϕ é um isomorfismo. Assim, temos que A possui uma F-álgebra isomorfa a $UT_2(F)$. Contradição, pois $UT_2(F) \notin \mathcal{V}$. $\square$

4.3 Caracterização das variedades de PI-expoente 2

Nesta seção caracterizaremos as variedades de PI-expoente 2 que é o objetivo central dessa dissertação.

Por meio do Teorema do PI-Expoente(Teorema 4.5) já calculamos o PI-expoente de algumas PI-álgebras como no próximo exemplo:

Exemplo 4.39.

- $A_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{G} & \mathcal{G} \\ 0 & \mathcal{G}^{(0)} \end{pmatrix}$, *com* $exp(A_1) = 3$;
- $A_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{G}^{(0)} & \mathcal{G} \\ 0 & \mathcal{G} \end{pmatrix}$, *com* $exp(A_2) = 3$;
- $A_3 = UT_3(F)$, *com* $exp(A_3) = 3$;
- $A_4 = M_2(F)$, *com* $exp(A_4) = 4$;
- $A_5 = M_{1,1}(\mathcal{G})$, *com* $exp(A_5) = 4$.

Estas cinco álgebras são bastante importantes para o nosso trabalho, pois em 2000, Giambruno e Zaicev provaram que:

Teorema 4.40 (Teorema Fundamental). *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras sobre um corpo F de característica zero. Então $exp(\mathcal{V}) > 2$ se, e somente se, $A_i \in \mathcal{V}$ para algum $i \in \{1, \dots, 5\}$.*

Demonstração: Notemos que se $A_i \in \mathcal{V}$ para algum $i \in \{1, \dots, 5\}$ então $exp(\mathcal{V})$ é necessariamente maior ou igual a 3. Portanto $exp(\mathcal{V}) > 2$ e a primeira parte do teorema está demonstrada.

Assumindo que $exp(\mathcal{V}) > 2$, temos que $\mathcal{V}$ é uma variedade de álgebras não trivial. Pelo Teorema da Envolvente de Grassmann(Teorema 3.17), existe uma F-superálgebra de dimensão finita $\mathcal{B}$ tal que:

$$\mathcal{V} = var(G(\mathcal{B})).$$

Como $\mathcal{B}$ é uma F-superálgebra de dimensão finita, sabemos do Teorema de Wedderburn-Malcev(Teorema 3.14) que $\mathcal{B}$ se escreve como:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \odot \ldots \odot \mathcal{B}_m + J,$$

onde cada $\mathcal{B}_i$ é uma F-superálgebra simples com $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida de $\mathcal{B}$ e J denota o radical de Jacobson de $\mathcal{B}$ com $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida dessa F-superálgebra.

Sejam $\overline{F}$ o fecho algébrico de F e a $\overline{F}$-álgebra $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \otimes \overline{F}$. É fácil ver que $G(\mathcal{B}) \otimes \overline{F} \cong G(\mathcal{B} \otimes \overline{F}) = G(\overline{\mathcal{B}})$. Pela Definição 4.1 e pela Proposição 2.21, temos que $exp(G(\mathcal{B}))$ sobre F coincide com $exp(G(\overline{\mathcal{B}}))$ sobre $\overline{F}$, isto porque $c_n^F(G(\mathcal{B})) =$

$c_n^F(G(\overline{\mathcal{B}}))$ para todo $n \geq 1$. Por outro lado, $Id(G(\mathcal{B})) \subset Id(G(\overline{\mathcal{B}}))$ e assim $G(\overline{\mathcal{B}}) \in var(G(\mathcal{B}))$. Com base nisto, nota-se que, para provar a segunda parte do Teorema Fundamental, é suficiente verificar que $G(\overline{\mathcal{B}})$ contém uma cópia de algum A_i, onde $i \in \{1, \ldots, 5\}$. Por esta razão, podemos considerar F como um corpo algebricamente fechado.

Como sabemos do Teorema de Classificação(Teorema 3.13), cada $\mathcal{B}_i$ é isomorfa a uma das seguintes F-superálgebras:

$$M_n(F), \text{ ou } M_n(F \oplus cF), \text{com } c^2 = 1, \text{ ou } M_{k,l}(F).$$

Notemos que se $\mathcal{B}_i \cong M_n(F)$ então $G(\mathcal{B})$ contém uma F-subálgebra isomorfa a $M_2(F)$ caso $n \geq 2$. Assim $A_4 \in \mathcal{V}$. Se $\mathcal{B}_i \cong M_n(F \oplus cF)$ e $n \geq 2$, então $G(\mathcal{B})$ contém uma F-subálgebra isomorfa a A_i onde $i \in \{1, 2, 4, 5\}$. Neste caso A_1, A_2, A_4 e A_5 são elementos de $\mathcal{V}$. Por último, notemos que se $\mathcal{B}_i \cong M_{k,l}(F)$ então $G(\mathcal{B})$ contém uma F-subálgebra isomorfa a A_5, donde segue que $A_5 \in \mathcal{V}$.

Daqui em diante, nos preocuparemos somente com os casos em que

$$\mathcal{B}_i \cong F \text{ ou } \mathcal{B}_i \cong F \oplus cF.$$

Como $exp(\mathcal{V}) > 2$, utilizando o Teorema do PI-Expoente(Teorema 4.5), uma das seguintes opções necessariamente ocorre:

- **Caso 1:** $\mathcal{B}_i J \mathcal{B}_j \neq 0$ em que $\mathcal{B}_i \cong F \oplus cF$ e $\mathcal{B}_j \cong F$;
- **Caso 2:** $\mathcal{B}_r J \mathcal{B}_s \neq 0$ em que $\mathcal{B}_r \cong F$ e $\mathcal{B}_s \cong F \oplus cF$;
- **Caso 3:** $\mathcal{B}_u J \mathcal{B}_v J \mathcal{B}_w \neq 0$ em que $\mathcal{B}_u \cong \mathcal{B}_v \cong \mathcal{B}_w \cong F$.

Observação 4.41. *Notemos que o caso $\mathcal{B}_t \cong \mathcal{B}_z \cong F \oplus cF$ recai no primeiro ou no segundo caso.*

Provaremos que em cada caso, existe uma F-subálgebra de $G(\mathcal{B})$ isomorfa a alguma A_i, onde $i \in \{1, \ldots, 5\}$.

Caso 1:

Como $\mathcal{B}_i J \mathcal{B}_j \neq 0$, sabemos que existem elementos $a_1 \in \mathcal{B}_i$, $j_1 \in J$ e $a_2 \in \mathcal{B}_j$ tais que $a_1 j_1 a_2 \neq 0$. Não é difícil ver que $1_{\mathcal{B}_i} j_1 1_{\mathcal{B}_j} \neq 0$. Afirmamos que existe um $j_2 \in J^{(0)}$ tal que $1_{\mathcal{B}_i} j_2 1_{\mathcal{B}_j} \neq 0$. De fato, se $1_{\mathcal{B}_i} j_1^{(0)} 1_{\mathcal{B}_j} \neq 0$, não há nada para fazer. Mas se $1_{\mathcal{B}_i} j_1^{(0)} 1_{\mathcal{B}_j} = 0$ então $1_{\mathcal{B}_i} j_1^{(1)} 1_{\mathcal{B}_j} \neq 0$. Tomando $j_2 = c j_1^{(1)} \in J^{(0)}$ temos $c j_2 1_{\mathcal{B}_j} = c(c j_1^{(1)}) 1_{\mathcal{B}_j} \neq 0$. Isto completa a nossa afirmação.

Consideremos os seguintes elementos de $\mathcal{B}$ com as suas respectivas parcelas homogêneas:

$$a_{11} = \frac{1_{\mathcal{B}_i} + c}{2}, \text{onde: } a_{11}^{(0)} = \frac{1_{\mathcal{B}_i}}{2} \text{ e } a_{11}^{(1)} = \frac{c}{2}.$$

$$a_{22} = \frac{1_{\mathcal{B}_i} - c}{2}, \text{ onde: } a_{22}^{(0)} = \frac{1_{\mathcal{B}_i}}{2} \text{ e } a_{22}^{(1)} = \frac{-c}{2}.$$

$$a_{33} = 1_{\mathcal{B}_j}, \text{ onde: } a_{33}^{(0)} = 1_{\mathcal{B}_j} \text{ e } a_{33}^{(1)} = 0.$$

$$a_{13} = \frac{1_{\mathcal{B}_i} + c}{2} j_2 1_{\mathcal{B}_j}, \text{ onde: } a_{13}^{(0)} = \frac{1_{\mathcal{B}_i}}{2} j_2 1_{\mathcal{B}_j} \text{ e } a_{13}^{(1)} = \frac{c}{2} j_2 1_{\mathcal{B}_j}.$$

$$a_{23} = \frac{1_{\mathcal{B}_i} - c}{2} j_2 1_{\mathcal{B}_j}, \text{ onde: } a_{23}^{(0)} = \frac{1_{\mathcal{B}_i}}{2} j_2 1_{\mathcal{B}_j} \text{ e } a_{23}^{(1)} = \frac{-c}{2} j_2 1_{\mathcal{B}_j}.$$

Observação 4.42. *Os subíndices desses cinco elementos não são escolhidos por acaso. Consideremos dois elementos a_{ij} e a_{kl} que pertencem a $\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{13}, a_{23}\}$. A soma ou o produto de a_{ij} por a_{kl} imita o que acontece com a soma ou produto das matrizes E_{ij} e E_{kl}.*

Notemos que os cinco elementos listados acima são linearmente independentes. Consideremos a seguinte F-subálgebra de $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{C} = span_F\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{13}, a_{23}\}.$$

A F-subálgebra $\mathcal{C}$ é uma F-superálgebra com $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida de $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{C}^{(0)} = span_F\{a_{11}^{(0)}, a_{22}^{(0)}, a_{33}^{(0)}, a_{13}^{(0)}, a_{23}^{(0)}\} \text{ e } \mathcal{C}^{(1)} = span_F\{a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(1)}, a_{13}^{(1)}, a_{23}^{(1)}\}.$$

Considere $\gamma = span_F\{E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{13}, E_{23}\}$ uma subálgebra de $UT_3(F)$ e o seguinte isomorfismo de F-álgebras.

$$\begin{cases} \phi : \mathcal{C} \to \gamma \\ a_{11} \mapsto E_{11} \\ a_{22} \mapsto E_{22} \\ a_{33} \mapsto E_{33} \\ a_{13} \mapsto E_{13} \\ a_{23} \mapsto E_{23} \end{cases}$$

O nosso objetivo é descrever como ϕ atua nas componentes homogêneas dos elementos acima. Para isso, precisamos calcular: $\phi(1_{\mathcal{B}_i}), \phi(1_{\mathcal{B}_j}), \phi(c)$ e $\phi(1_{\mathcal{B}_i} j 1_{\mathcal{B}_j})$. A partir de manipulações simples, obtemos:

$$\phi(1_{\mathcal{B}_i}) = E_{11} + E_{22},\ \phi(c) = E_{11} - E_{22},\ \phi(1_{\mathcal{B}_j}) = E_{33} \text{ e } \phi(1_{\mathcal{B}_i} j 1_{\mathcal{B}_j}) = E_{13} + E_{23}.$$

Assim, temos que:

$$\begin{cases} \phi : \mathcal{C} \to \gamma \\ a_{11}^{(0)} \mapsto (E_{11} + E_{22})/2 & \text{e } a_{11}^{(1)} \mapsto (E_{11} - E_{22})/2 \\ a_{22}^{(0)} \mapsto (E_{11} + E_{22})/2 & \text{e } a_{22}^{(1)} \mapsto (E_{22} - E_{11})/2 \\ a_{33}^{(0)} \mapsto E_{33} & \text{e } a_{33}^{(1)} \mapsto 0 \\ a_{13}^{(0)} \mapsto (E_{13} + E_{23})/2 & \text{e } a_{13}^{(1)} \mapsto (E_{13} - E_{23})/2 \\ a_{23}^{(0)} \mapsto (E_{13} + E_{23})/2 & \text{e } a_{23}^{(1)} \mapsto (E_{23} - E_{13})/2 \end{cases}$$

Dessa maneira, γ é uma F-superálgebra com $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida de $\mathcal{C}$ a partir do isomorfismo ϕ.

Pela construção do isomorfismo ϕ, temos que $\phi(c) = (E_{11} - E_{22})$. Substituamos $(E_{11} - E_{22})$ por $\phi(c)$(o propósito é identificar com mais facilidade as componentes $\gamma^{(0)}$ e $\gamma^{(1)}$ de γ). Logo:

$$\begin{cases} \phi : \mathcal{C} \to \gamma \\ a_{11}^{(0)} \mapsto (E_{11} + E_{22})/2 \text{ e } a_{11}^{(1)} \mapsto \phi(c)(E_{11} + E_{22})/2 \\ a_{22}^{(0)} \mapsto (E_{11} + E_{22})/2 \text{ e } a_{22}^{(1)} \mapsto -\phi(c)(E_{11} + E_{22})/2 \\ a_{33}^{(0)} \mapsto E_{33} \text{ e } a_{33}^{(1)} \mapsto 0 \\ a_{13}^{(0)} \mapsto (E_{13} + E_{23})/2 \text{ e } a_{13}^{(1)} \mapsto \phi(c)(E_{13} + E_{23})/2 \\ a_{23}^{(0)} \mapsto (E_{13} + E_{23})/2 \text{ e } a_{23}^{(1)} \mapsto -\phi(c)(E_{23} + E_{13})/2 \end{cases}$$

Assim a $\mathbb{Z}_2$-graduação de γ induzida é:

$$\gamma^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \nu \\ 0 & \lambda & \nu \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} |\lambda, \nu, \mu \in F \right\} \text{ e } \gamma^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \nu \\ 0 & -\lambda & -\nu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |\lambda, \nu, \mu \in F \right\}.$$

Observemos também que $G(\gamma)$ é uma F-subálgebra de $G(\mathcal{B})$. Além disso:

$$G(\gamma) = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & 0 & d+e \\ 0 & a-b & d-e \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \right\}, \text{ onde } a, c, d \in \mathcal{G}^{(0)} \text{ e } b, e \in \mathcal{G}^{(1)}.$$

Finalmente, note que podemos construir um isomorfismo de F-álgebras:

$$\phi_1 : G(\gamma) \to A_1,$$

cuja a regra de formação é:

$$\begin{pmatrix} a+b & 0 & d+e \\ 0 & a-b & d-e \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \xrightarrow{\phi_1} \begin{pmatrix} a-b & d-e \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Assim, existe uma F-subálgebra de $G(\mathcal{B})$ isomorfa a A_1 e portanto $A_1 \in \mathcal{V}$.

Caso 2:

Neste caso, temos que $\mathcal{B}_r J \mathcal{B}_s \neq 0$ em que $\mathcal{B}_r \cong F$ e $\mathcal{B}_s \cong F \oplus cF$. Por um argumento análogo ao caso 1, não é difícil verificar que $1_{\mathcal{B}_r} j_3 1_{\mathcal{B}_s} \neq 0$ para algum $j_3 \in J^{(0)}$.

Considere os seguintes elementos de $\mathcal{B}$ com as suas respectivas parcelas homogêneas:

$$b_{11} = 1_{\mathcal{B}_r}, \text{ onde: } b_{11}^{(0)} = 1_{\mathcal{B}_r} \text{ e } b_{11}^{(1)} = 0.$$

$$b_{22} = \frac{1_{\mathcal{B}_s} + c}{2}, \text{ onde: } b_{22}^{(0)} = \frac{1_{\mathcal{B}_s}}{2} \text{ e } b_{22}^{(1)} = \frac{c}{2}.$$

$$b_{33} = \frac{1_{\mathcal{B}_s} - c}{2}, \text{onde: } b_{33}^{(0)} = \frac{1_{\mathcal{B}_s}}{2} \text{ e } b_{33}^{(1)} = \frac{-c}{2}.$$

$$b_{12} = 1_{\mathcal{B}_r} j_3 \frac{1_{\mathcal{B}_s} + c}{2}, \text{ onde: } b_{12}^{(0)} = 1_{\mathcal{B}_r} j_3 \frac{1_{\mathcal{B}_s}}{2} \text{ e } b_{12}^{(1)} = 1_{\mathcal{B}_r} j_3 \frac{c}{2}.$$

$$b_{13} = 1_{\mathcal{B}_r} j_3 \frac{1_{\mathcal{B}_s} - c}{2}, \text{ onde: } b_{13}^{(0)} = 1_{\mathcal{B}_r} j_3 \frac{1_{\mathcal{B}_s}}{2} \text{ e } b_{13}^{(1)} = 1_{\mathcal{B}_r} j_3 \frac{-c}{2}.$$

Notemos que os cinco elementos acima são linearmente independentes. Assim, podemos considerar a seguinte F-subálgebra de $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{D} = span_F = \{b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{12}, b_{13}\}.$$

Temos que $\mathcal{D}$ é uma F-superálgebra cujas as componentes homogêneas são:

$$\mathcal{D}^{(0)} = span_F = \{b_{11}^{(0)}, b_{22}^{(0)}, b_{33}^{(0)}, b_{13}^{(0)}, b_{12}^{(0)}\} \text{ e } \mathcal{D}^{(1)} = span_F = \{b_{11}^{(1)}, b_{22}^{(1)}, b_{33}^{(1)}, b_{13}^{(1)}, b_{12}^{(1)}\}.$$

Seja $\rho = span_F\{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{22}, E_{33}\}$ uma F-subálgebra de $UT_3(F)$ e o seguinte isomorfismo de F-álgebras:

$$\begin{cases} \phi_2 : \mathcal{D} \to \rho & \\ b_{11}^{(0)} \mapsto E_{11} & \text{e } \; b_{11}^{(1)} \mapsto 0 \\ b_{22}^{(0)} \mapsto 1/2(E_{22} + E_{33}) & \text{e } \; b_{22}^{(1)} \mapsto 1/2(E_{22} + E_{33})\phi_2(c) \\ b_{33}^{(0)} \mapsto 1/2(E_{22} + E_{33}) & \text{e } \; b_{33}^{(1)} \mapsto -1/2(E_{22} + E_{33})\phi_2(c) \\ b_{13}^{(0)} \mapsto 1/2(E_{13} + E_{12}) & \text{e } \; b_{13}^{(1)} \mapsto -1/2(E_{13} + E_{12})\phi_2(c) \\ b_{12}^{(0)} \mapsto 1/2(E_{13} + E_{12}) & \text{e } \; b_{12}^{(1)} \mapsto 1/2(E_{13} + E_{12})\phi_2(c) \end{cases}$$

onde $\phi_2(c) = (E_{22} - E_{33})$.

Notemos que ρ é uma F-álgebra com $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida de $\mathcal{D}$ a partir de ϕ_2. A sua $\mathbb{Z}_2$-graduação é a seguinte:

$$\rho^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} \omega & \kappa & \kappa \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix} |\omega, \kappa, \tau \in F \right\} \text{ e } \rho^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \kappa & -\kappa \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & -\tau \end{pmatrix} |\tau, \kappa \in F \right\}.$$

Observemos também que $G(\rho)$ é uma F-subálgebra de $G(\mathcal{B})$. Além disso:

$$G(\rho) = \left\{ \begin{pmatrix} f & g+h & g-h \\ 0 & i+j & 0 \\ 0 & 0 & i-j \end{pmatrix} \right\}, \text{ onde } f, g, i \in \mathcal{G}^{(0)} \text{ e } h, j \in \mathcal{G}^{(1)}.$$

Verificaremos que $G(\mathcal{B})$ contém uma F-subálgebra isomorfa à A_2. Para isto, consideraremos o seguinte homomorfismo de F-álgebras:

$$\rho_2 : G(\rho) \to A_2$$

cuja a regra é a seguinte:

$$\begin{pmatrix} f & g+h & g-h \\ 0 & i+j & 0 \\ 0 & 0 & i-j \end{pmatrix} \xrightarrow{\rho_2} \begin{pmatrix} f & g+h \\ 0 & i+j \end{pmatrix}.$$

Não é difícil verificar que ρ_2 é um isomorfismo. Assim $A_2 \in \mathcal{V}$ e o segundo caso está provado.

Caso 3:

Neste caso, temos $\mathcal{B}_u J \mathcal{B}_v J \mathcal{B}_w \neq 0$ em que $\mathcal{B}_u \cong \mathcal{B}_v \cong \mathcal{B}_w \cong F$. Assim, existem $c_1 \in \mathcal{B}_u$, $j_3, j_4 \in J$, $c_2 \in \mathcal{B}_v$ e $c_3 \in \mathcal{B}_w$ tais que $c_1 j_2 c_2 j_3 c_3 \neq 0$. Não é difícil ver que $1_{\mathcal{B}_u} j_2 c_2 j_3 1_{\mathcal{B}_w} \neq 0$. Além disso, existe $j_5 \in J$ tal que $1_{\mathcal{B}_u} j_2 1_{\mathcal{B}_v} j_5 1_{\mathcal{B}_w} \neq 0$. Para isto, basta observar que: $1_{\mathcal{B}_u} j_2 c_2 j_3 1_{\mathcal{B}_w} = 1_{\mathcal{B}_u} j_2 1_{\mathcal{B}_v} c_2 j_3 1_{\mathcal{B}_w}$ e fazer $j_5 = c_2 j_3$.

Notemos que o fato $1_{\mathcal{B}_u} j_2 1_{\mathcal{B}_v} j_5 1_{\mathcal{B}_w} \neq 0$ implica necessariamente que um dos seguinte subcasos ocorre:

- **Subcaso 1:** $1_{\mathcal{B}_u} j_2^{(0)} 1_{\mathcal{B}_v} j_5^{(0)} 1_{\mathcal{B}_w} \neq 0$;
- **Subcaso 2:** $1_{\mathcal{B}_u} j_2^{(0)} 1_{\mathcal{B}_v} j_5^{(1)} 1_{\mathcal{B}_w} \neq 0$;
- **Subcaso 3:** $1_{\mathcal{B}_u} j_2^{(1)} 1_{\mathcal{B}_v} j_5^{(0)} 1_{\mathcal{B}_w} \neq 0$;
- **Subcaso 4:** $1_{\mathcal{B}_u} j_2^{(1)} 1_{\mathcal{B}_v} j_5^{(1)} 1_{\mathcal{B}_w} \neq 0$.

Para facilitar a linguagem, em cada subcaso, substituiremos $j_2^{(0)}$ ou $j_2^{(1)}$ por j_r. Além disso, substituiremos $j_5^{(0)}$ ou $j_5^{(1)}$ por j_s.

Consideremos os seguintes elementos:

$c_{11} = 1_{\mathcal{B}_u}$, $c_{22} = 1_{\mathcal{B}_v}$, $c_{33} = 1_{\mathcal{B}_w}$, $c_{12} = 1_{\mathcal{B}_u} j_r 1_{\mathcal{B}_v}$, $c_{23} = 1_{\mathcal{B}_v} j_s 1_{\mathcal{B}_w}$ e $c_{13} = 1_{\mathcal{B}_u} j_r 1_{\mathcal{B}_v} j_s 1_{\mathcal{B}_w}$.

Não é difícil verificar que estes são linermente independentes.

Considere a seguinte F-subálgebra de $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{E} = span_F\{c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{23}\}.$$

A F-subálgebra $\mathcal{E}$ tem estrutura de F-superálgebra com $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida de $\mathcal{B}$. As suas componentes homogêneas são:

$\mathcal{E}^{(0)} = span_F\{c_{11}^{(0)}, c_{22}^{(0)}, c_{33}^{(0)}, c_{12}^{(0)}, c_{13}^{(0)}, c_{23}^{(0)}\}$ e $\mathcal{E}^{(1)} = span_F\{c_{11}^{(1)}, c_{22}^{(1)}, c_{33}^{(1)}, c_{12}^{(1)}, c_{13}^{(1)}, c_{23}^{(1)}\}$.

Para identificar os subconjuntos $\mathcal{E}^{(0)}$ e $\mathcal{E}^{(1)}$ é essencial conhecer os elementos j_r e j_s. Saber se $j_r = j_2^{(0)}$ ou $j_r = j_2^{(1)}$ muda completamente a avaliação que faremos para os conjuntos $\mathcal{E}^{(0)}$ e $\mathcal{E}^{(1)}$. De qualquer forma, em todos os subscasos, teremos que:

$$c_{11}^{(0)} = 1_{\mathcal{B}_u} \text{ e } c_{11}^{(1)} = 0.$$

$$c_{22}^{(0)} = 1_{\mathcal{B}_v} \text{ e } c_{22}^{(1)} = 0.$$

$$c_{33}^{(0)} = 1_{\mathcal{B}_w} \text{ e } c_{33}^{(1)} = 0.$$

A linha de demonstração será muito parecida nos quatro subcasos apontados.Para evitar que a exposição fique enfadonha, pouparemos informações repetitivas depois do primeiro subcaso. Faremos apenas um pequeno resumo do subcaso 2 em diante.

Subcaso 1:

Falta apenas avaliar os termos c_{12}, c_{13} e c_{23}. As partes homogêneas destes termos são respectivamente:

$$c_{12}^{(0)} = 1_{\mathcal{B}_u} j_r 1_{\mathcal{B}_v} \text{ e } c_{12}^{(1)} = 0;$$

$$c_{13}^{(0)} = 1_{\mathcal{B}_u} j_r 1_{\mathcal{B}_v} j_s 1_{\mathcal{B}_w} \text{ e } c_{13}^{(1)} = 0;$$

$$c_{23}^{(0)} = 1_{\mathcal{B}_v} j_s 1_{\mathcal{B}_w} \text{ e } c_{23}^{(1)} = 0.$$

Considere a F-subálgebra $\sigma = span_F\{E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}, E_{13}, E_{23}\}$. Existe um isomorfismo de F-álgebras $\theta : \mathcal{E} \to \sigma$ com a seguinte regra:

$$\begin{cases} \theta : \mathcal{E} \to \sigma \\ c_{11} \mapsto E_{11} \\ c_{12} \mapsto E_{12} \\ c_{13} \mapsto E_{13} \\ c_{22} \mapsto E_{22} \\ c_{23} \mapsto E_{22} \\ c_{33} \mapsto E_{33} \end{cases}$$

σ tem uma $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida de $\mathcal{E}$ a partir de θ. A sua $\mathbb{Z}_2$-graduação é trivial.

Um cálculo simples mostra que a envolvente de Grassmann de σ é:

$$G(\sigma) = \begin{pmatrix} \mathcal{G}^{(0)} & \mathcal{G}^{(0)} & \mathcal{G}^{(0)} \\ 0 & \mathcal{G}^{(0)} & \mathcal{G}^{(0)} \\ 0 & 0 & \mathcal{G}^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Como podemos verificar facilmente, $G(\sigma)$ contém uma F-subálgebra isomorfa a $UT_3(F)$.

Subcaso 2:

Temos que:

$$c_{12}^{(0)} = 1_{\mathcal{B}_u} j_r 1_{\mathcal{B}_v} \text{ e } c_{12}^{(1)} = 0.$$

$$c_{13}^{(0)} = 0 \text{ e } c_{13}^{(1)} = 1_{\mathcal{B}_u} j_r 1_{\mathcal{B}_v} j_s 1_{\mathcal{B}_w}.$$

$$c_{23}^{(0)} = 0 \text{ e } c_{23}^{(1)} = 1_{\mathcal{B}_v} j_s 1_{\mathcal{B}_w}.$$

A envolvente de Grassmann envolvida é:

$$G(\sigma_2) = \begin{pmatrix} \mathcal{G}^{(0)} & \mathcal{G}^{(0)} & \mathcal{G}^{(1)} \\ 0 & \mathcal{G}^{(0)} & \mathcal{G}^{(1)} \\ 0 & 0 & \mathcal{G}^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Subcaso 3:

Temos que:

$$c_{12}^{(0)} = 0 \text{ e } c_{12}^{(1)} = 1_{\mathcal{B}_u} j_r 1_{\mathcal{B}_v}.$$

$$c_{13}^{(0)} = 0 \text{ e } c_{13}^{(1)} = 1_{\mathcal{B}_u} j_r 1_{\mathcal{B}_v} j_s 1_{\mathcal{B}_w}.$$

$$c_{23}^{(0)} = 1_{\mathcal{B}_v} j_s 1_{\mathcal{B}_w} \text{ e } c_{23}^{(1)} = 0.$$

A envolvente de Grassmann envolvida é:

$$G(\sigma_3) = \begin{pmatrix} \mathcal{G}^{(0)} & \mathcal{G}^{(1)} & \mathcal{G}^{(1)} \\ 0 & \mathcal{G}^{(0)} & \mathcal{G}^{(0)} \\ 0 & 0 & \mathcal{G}^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Subcaso 4:

Temos que:

$$c_{12}^{(0)} = 0 \text{ e } c_{12}^{(1)} = 1_{\mathcal{B}_u} j_r 1_{\mathcal{B}_v}.$$

$$c_{13}^{(0)} = 1_{\mathcal{B}_u} j_r 1_{\mathcal{B}_v} j_s 1_{\mathcal{B}_w} \text{ e } c_{13}^{(1)} = 0.$$

$$c_{23}^{(0)} = 0 \text{ e } c_{23}^{(1)} = 1_{\mathcal{B}_v} j_s 1_{\mathcal{B}_w}.$$

A envolvente de Grassmann envolvida é:

$$G(\sigma_4) = \begin{pmatrix} \mathcal{G}^{(0)} & \mathcal{G}^{(1)} & \mathcal{G}^{(0)} \\ 0 & \mathcal{G}^{(0)} & \mathcal{G}^{(1)} \\ 0 & 0 & \mathcal{G}^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Com os quatro subcasos avaliados, basta mostrar que os últimos três subcasos contêm, cada um, pelo menos uma F-subálgebra isomorfa a algum A_i.

Sejam x e y distintos geradores de $\mathcal{G} - span_F\{1\}$. Consideremos as seguintes F-subálgebras de $G(\sigma_2)$, $G(\sigma_3)$ e $G(\sigma_4)$, respectivamente:

$$\mathcal{J}_2 = span_F\{E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}, xE_{13}, xE_{23}\};$$

$$\mathcal{J}_3 = span_F\{E_{11}, E_{22}, E_{33}, xE_{12}, xE_{13}, E_{23}\};$$

$$\mathcal{J}_4 = span_F\{E_{11}, E_{22}, E_{33}, xE_{12}, xyE_{13}, yE_{23}\}.$$

Não é difícil verificar que $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$ e $\mathcal{J}_4$ são isomorfas a $UT_3(F)$. Assim, concluímos para cada um dos quatro subcasos do caso 3 que $UT_3(F) \in \mathcal{V}$. Isto conclui a demonstração. □

Corolário 4.43 (Caracterização das variedades de PI-expoente 2)**.** *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras sobre um corpo F. Então $exp(\mathcal{V}) = 2$ se, e somente se, $A_i \notin \mathcal{V}$ para todo $i \in \{1, \cdots, 5\}$ e pelo menos uma das seguintes álgebras pertence a $\mathcal{V}$: $UT_2(F)$ ou $\mathcal{G}$.*

Demonstração: Este corolário é uma consequência imediata do Teorema Fundamental(Teorema 4.40) e do Teorema do PI-Expoente de Kemer(Teorema 4.38). □

Na próxima subseção exploraremos alguns resultados adicionais a respeito do teorema anterior.

4.3.1 Variedades minimais de PI-expoente maior que 2

Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras sobre um corpo F.

Definição 4.44. *Dizemos que $\mathcal{V}$ é minimal de PI-Expoente maior que 2 se $exp(\mathcal{V}) > 2$ e para qualquer subvariedade própria W de $\mathcal{V}$ vale que $exp(W) \leq 2$.*

Consideremos as cinco álgebras listadas no Exemplo 4.39. Denominaremos por $\mathcal{V}_i$ a variedade gerada pela álgebra A_i onde $i \in \{1, \ldots, 5\}$. Como veremos no corolário da próxima proposição, essas cinco variedades são as únicas minimais de PI-expoente maior que 2.

Proposição 4.45. *Sejam i, j dois números distintos entre 1 e 5. Então $\mathcal{V}_i \not\subset \mathcal{V}_j$.*

Demonstração: Dividiremos esta demonstração em duas partes. A primeira consiste em analisar os PI-expoentes das cinco álgebras listadas no Exemplo 4.39. Se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são duas variedades tais que $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, sabemos que $Id(\mathcal{V}) \subset Id(\mathcal{U})$ e $exp(\mathcal{U}) \leq exp(\mathcal{V})$. Dessa maneira, concluímos que $\mathcal{V}_k \not\subset \mathcal{V}_l$ para todo $k \in \{4, 5\}$ e $l \in \{1, 2, 3\}$.

Sabemos que:

- $[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5]$ é uma identidade de A_1;
- $[x_1, x_2][x_3, x_4, x_5]$ é uma identidade de A_2;
- $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]$ é uma identidade de A_3;
- $St_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ é uma identidade de A_4;
- $[[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5]$ é uma identidade de A_5.

A segunda parte desta proposição consiste em comparar as variedades geradas pelas álgebras $A_1, \cdots, A_5$. Em geral, para se provar que uma variedade $var(A) \not\subset var(B)$, temos que exibir uma identidade f de $Id(B)$ que não é uma identidade de $Id(A)$. Faremos isto sistematicamente para os demais casos que sobraram.

Considere as seguintes matrizes(a primeira sequência são matrizes de A_1,a segunda sequência são matrizes de A_2 e a terceira de A_3):

$$B_1 = \begin{pmatrix} e_4 & e_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} e_5 & e_5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} e_1 & e_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} e_2 & e_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B_6 = \begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ 0 & e_1 \end{pmatrix}, B_7 = \begin{pmatrix} 0 & e_2 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}, B_8 = \begin{pmatrix} e_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_9 = \begin{pmatrix} 0 & e_4 \\ 0 & e_4 \end{pmatrix} \text{ e } B_{10} = \begin{pmatrix} 0 & e_5 \\ 0 & e_5 \end{pmatrix};$$

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, B_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que: $[B_6, B_7, B_8][B_9, B_{10}] \neq 0$, $[B_{11}, B_{12}, B_{13}][B_{11}, B_{12}] \neq 0$, $[B_{11}, B_{12}][B_{11}, B_{12}, B_{13}] \neq 0$ e $[B_1, B_2][B_3, B_4, B_5] \neq 0$. Dessa forma, $\mathcal{V}_1$ não contém as variedade $\mathcal{V}_2$ e $\mathcal{V}_3$. Já $\mathcal{V}_2$ não contém as variedades $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_3$.

Outro fato a ser destacado é que nenhuma das álgebras do Exemplo 4.39, com exceção de A_4, satisfaz o polinômio $St_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$. De fato, A_1 e A_2 não podem satisfazer $St_4(x_1, \ldots, x_4)$, pois $\mathcal{G} \in \mathcal{V}_1$ e $\mathcal{G} \in \mathcal{V}_2$(existe uma cópia de $\mathcal{G}$ isomorficamente imersa em A_1 e outra em A_2). Agora, considere as seguintes matrizes(a primeira sequência formada por matrizes de A_3 e a segunda por matrizes de A_5):

$$B_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B_{17} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B_{18} = \begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ e_1 & 0 \end{pmatrix},\ B_{19} = \begin{pmatrix} 0 & e_2 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix},\ B_{20} = \begin{pmatrix} 0 & e_3 \\ e_3 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B_{21} = \begin{pmatrix} 0 & e_4 \\ e_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que:

$St(B_{14}, B_{15}, B_{16}, B_{17}) \neq 0$ e $St(B_{18}, B_{19}, B_{20}, B_{21}) \neq 0$. Logo $\mathcal{V}_k \not\subset \mathcal{V}_4$ para todo $k \in \{1, 2, 3, 5\}$.

Note ainda que ao considerar as seguintes matrizes(a primeira sequência é formada por matrizes de A_1 e a segunda por matrizes de A_2):

$$B_{22} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_{23} = \begin{pmatrix} e_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_{24} = \begin{pmatrix} e_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B_{25} = \begin{pmatrix} e_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B_{26} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_1 \end{pmatrix},\ B_{27} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix},\ B_{28} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_3 \end{pmatrix} \text{ e } B_{29} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_4 \end{pmatrix};$$

temos:

$[B_{22}, B_{23}][B_{24}, B_{25}][B_2, B_5] \neq 0$ e $[B_{26}, B_{27}][B_{28}, B_{29}][B_9, B_{10}] \neq 0$. Assim $\mathcal{V}_l \not\subset \mathcal{V}_3$ em que $l = 1$ ou $l = 2$.

Por último, vamos verificar que A_5 é a única álgebra entre as citadas no Exemplo 4.39 que satisfaz o polinômio $[[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5]$. Para isto, considere as seguintes matrizes(a primeira sequência é formada por matrizes de A_1, a segunda é formada por matrizes de A_2, a terceira é formada por matrizes de A_3 e a quarta por matrizes de A_4):

$$B_{30} = \begin{pmatrix} e_1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_{31} = \begin{pmatrix} e_2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & e_1 \end{pmatrix} \text{ e } B_{34} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix};$$

$$B_{35} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B_{36} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B_{37} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_{38} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_{39} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_{40} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B_{41} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que:

$[[B_{30}, B_{31}], [B_{24}, B_{25}], B_{32}] \neq 0$, $[[B_{33}, B_{34}], [B_{28}, B_{29}], B_{32}] \neq 0$, $[[B_{14}, B_{15}], [B_{12}, B_{36}], B_{35}] \neq 0$ e $[[B_{37}, B_{38}], [B_{39}, B_{40}], B_{41}] \neq 0$. Logo $\mathcal{V}_l \not\subset \mathcal{V}_5$ para todo l em $\{1, 2, 3, 4\}$. Isto conclui a proposição.

□

Corolário 4.46. *As variedade $\mathcal{V}_i = var(A_i)$, onde $i \in \{1, \ldots, 5\}$, são as únicas variedades minimais de PI-expoente maior que 2.*

Demonstração: Este corolário é uma consequência imediata da proposição anterior e do Teorema Fundamental(Teorema 4.40). □

Observação 4.47 (Variedades minimais de PI-expoente 2)**.** *Nesta subseção, definimos o conceito de variedades minimais de PI-expoente maior que* 2 *e caracterizamos estas variedades. Para esta caracterização, usamos o Teorema Fundamental (Teorema 4.40) e a Proposição 4.45.*

Com as mesmas idéias dessa proposição e o Teorema do PI-Expoente de Kemer(Teorema 4.38) iremos caracterizar outra classe de variedades minimais conhecidas como variedades minimais de PI-expoente 2*.*

Definição 4.48. *Dizemos que uma variedade $\mathcal{V}$ é minimal de PI-expoente* 2 *se $exp(\mathcal{V}) = 2$ e para qualquer subvariedade própria W de $\mathcal{V}$ vale $exp(W) \leq 1$.*

Proposição 4.49. *Sejam $V' = var(UT_2(F))$ e $W' = var(\mathcal{G})$. Então $V' \not\subset W'$ e $W' \not\subset V'$.*

Demonstração: *Notemos, inicialmente, que $W' \not\subset V'$, pois:*

$$[e_1, e_2][e_3, e_4] = 4e_1e_2e_3e_4.$$

Reciprocamente, consideremos os seguintes elementos de $UT_2(F)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um cálculo simples mostra que $[A, B, C] \neq 0$ e portanto $V' \not\subset W'$. □

Com base nesta proposição e no Teorema do PI-Expoente de Kemer (Teorema 4.38), temos o seguinte resultado:

Teorema 4.50. *As únicas variedades minimais de PI-expoente* 2 *são V' e W'.*

Considerações Finais

Assim como consideramos o comportamento assintótico da sequência de codimensões de uma PI-álgebra A a partir do seu PI-expoente, podemos considerar outras sequências associadas a A e estudar seu comportamento assintótico para determinar outras propriedades.

No início da página 56, vimos que S_n age à esquerda sobre o espaço dos polinômios multilineares de grau n:

$$P_n = span_F\{x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}.$$

Aquela ação era descrita da seguinte maneira: se $f(x_1, \dots, x_n) \in P_n$ e $\alpha \in S_n$ então:

$$\alpha(f(x_1, \dots, x_n)) = f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}).$$

Desta forma, P_n tem uma estrutura de S_n-módulo. Além disso, como $Id(A)$ é um T-ideal, temos que $P_n \cap Id(A)$ é invariante sob a ação definida acima. Assim,

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$$

tem uma estrutura de S_n-módulo.

Sendo assim, podemos considerar o S_n-caracter de $P_n(A)$, o qual é denotado por $\chi_n(A)$ e denominado de n-ésimo co-caracter de A.

Em corpos de característica zero é possível decompor $\chi_n(A)$ em S_n-caracteres irredutíveis χ_λ, onde $\lambda \vdash n$(este resultado pode ser encontrado em [Cur-Rei]). Com isto, temos

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$$

onde m_λ é a correspondente multiplicidade do caracter χ_λ associado à partição λ de n. Com esta decomposição, podemos definir uma sequência, onde o n-ésimo termo é dado por:

$$m_n(A) := \max_{\lambda \vdash n} m_\lambda, \ n \geq 1.$$

Esta sequência é chamada sequência de multiplicidades de A.

Em 1983, Berele e Regev[Ber-Reg] provaram que a sequência $\{m_n(A)\}_{n\geq 1}$ é limitada polinomialmente, ou seja, existem constantes c e t em F tais que:

$$m_n(A) \leq cn^t, \ \forall \ n \geq 1.$$

Notemos que se A é uma álgebra nilpotente de expoente N então $P_n(A)$ é o módulo nulo $\{0\}$ para qualquer $n \geq N$. Caso A não seja uma PI-álgebra nilpotente, definimos:

$$mlt(A) := \limsup_{n\to\infty} log_n m_n(A).$$

Além disso, sabemos que se existem constantes $a, b \in F$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$an^t \leq m_n(A) \leq bn^t \ \forall \ n > n_0,$$

então

$$\limsup_{n\to\infty} log_n m_n(A) = t$$

e portanto, $mlt(A)$ realmente captura o comportamento polinomial da sequência de multiplicidades de A: $\{m_n(A)\}_{n\geq 1}$.

No artigo [Gia-Ben-Svi], os matemáticos Giambruno, Benanti e Sviridova determinaram o valor preciso de $mlt(A)$ para algumas álgebras A de PI-expoente pequeno, particularmente para aquelas onde $exp(A) = 2$. Além disso, caracterizam as PI-álgebras finitamente geradas(PI-álgebras geradas, como álgebra, por um número finito de elementos) para as quais $mlt(A) = 1$ mostrando que essas são exatamente as de PI-expoente 2.

O primeiro fato que destacamos deste trabalho(com a notação do Exemplo 4.39) o seguinte teorema que sintetiza quatro lemas importantes desse artigo:

Teorema 4.51. *(Lemas* 3.1*,* 3.3*,* 3.4 *e* 3.5*).*

- $mlt(A_1) = mlt(A_2) = mlt(A_5) = 1,$
- $mlt(A_3) = mlt(A_4) = 3.$

Como consequência desse teorema e do Teorema Fundamental de Giambruno e Zaicev(Teorema 4.40), eles concluíram o seguinte:

Corolário 4.52 (Corolário 3.7)**.** *Se A é uma PI-álgebra com $exp(A) > 2$ então $mlt(A) \geq 1$.*

Para garantir a caracterização citada, no final do artigo foi provado o seguinte teorema:

Teorema 4.53 (Teorema 4.3)**.** *Se A é uma PI-álgebra finitamente gerada então são equivalentes:*

- $mlt(A) \leq 1$;
- $exp(A) \leq 2$;
- $UT_3(F), M_2(F) \notin var(A)$.

Notemos que $mlt(A) = 0$ se, e só se, $m_n \leq c,\ \forall\ n \geq 1$($c$ é uma constante inteira positiva).

Um resultado devido a Mishchenko, Regev e Zaicev[Mis-Reg-Zai] mostra que $m_n \leq c,\ \forall\ n \geq 1$ se, e só, se $UT_2(F) \notin var(A)$. Assim, $mlt(A) = 0$ é equivalente a $UT_2(F) \notin var(A)$. Por outro lado, pode-se mostrar que, A ser finitamente gerada é equivalente ao fato de $\mathcal{G} \notin var(A)$. Uma demonstração desse fato pode ser encontrada em [Gia-Zai4].

Portanto se A é uma PI-álgebra finitamente gerada e $mlt(A) = 0$ então $\mathcal{G}$ e $UT_2(F)$ não pertencem a $var(A)$. Logo, pelo Teorema do PI-Expoente de Kemer(Teorema 4.38), temos que $exp(A) \leq 1$. Reciprocamente, se $exp(A) \leq 1$ então $mlt(A) = 0$ e A é finitamente gerada.

Consequentemente

Corolário 4.54 (Corolário 4.4)**.** *Se A é uma PI-álgebra finitamente gerada então são equivalentes:*

- $mlt(A) = 1$*;*
- $exp(A) = 2$*;*
- $UT_3(F), M_2(F) \notin var(A)$ *e* $UT_2(F) \in var(A)$*.*

Por fim, citamos que além da conjectura de Amitsur sobre o PI-expoente, na década de 1980, Regev conjecturou uma afirmação interessante: para qualquer PI-álgebra A, existem constantes $c \in \mathbb{R}, d, q \in \mathbb{Z}$, com $d \geq 0$ tais que:

$$c_n(A) \approx cn^{\frac{q}{2}}d^n, \text{ quando } n \to \infty.$$

Observação 4.55. *Na notação acima, $f(n) \approx g(n)$ significa que* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 1$.

Em 2008, Gordienko[Gordienko] provou que a conjectura de Regev era verdadeira para PI-álgebras de PI-expoente 2 e deu uma nova demonstração da conjectura para PI-álgebras de PI-expoente 1(a demonstração original foi dada pelo algebrista Drensky[Drensky2], em 1989).

A prova para o caso em que o PI-expoente de uma F-álgebra A é 2 usa fortemente o método de Giambruno e Zaicev para o cálculo do $exp(A)$, dado na Observação 4.7.

Referências Bibliográficas

[1] [Ami-Lev] *S.A. Amitsur and J.Levitzki.* Minimal identities for algebras. Proc. Amer. Math. Soc. 1(1950),449-463.

[2] [Ati-Mac] *M.Atiyah and I. Macdonald.* Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley,1969, 24-31.

[3] [Ber-Reg] *A. Berele and A. Regev.* Application of Hook Young diagrams to P.I.algebras. J. Algebra, 82, (1983), 559-567.

[4] [Cur-Rei] *C.Curtis and I.Reiner.* Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, J. Wiley e Sons, New York, 1962, 485-492.

[5] [Den-Far] *B. Farb and R. Keith Dennis.* Noncommutative Algebra. Graduate texts in mathematics:144. Springer-Verlag New York, 1993, 29-67.

[6] [Dil] *R.P. Dilworth.* A decomposion theorem for partially ordered sets.Ann of Math 51,1950.

[7] [Drensky] *V. Drensky.* Free Algebras and PI-Algebras. Springer-Verlag Singapore, 2000.

[8] [Drensky2] *V. Drensky.* Relations for cocharacter sequences of T-ideals, in Proceedings of the International Conference on Algebra Dedicated to the Memory of A.I Malcev, Comtemp. Math., Part 2, Novosibirsk, 1989(Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992), Vol. 131, 285-300.

[9] [Gia-Ben-Svi] *R.A.Giambruno, F. Benanti and I. Sviridova.* Asymptotics for Multiplicities in the Cocharacters of some PI-Algebras.Proceedings of the American Mathematical Society (2004), vol. 132, no3, 669-679.

[10] [Gia-Zai1] *A.Giambruno and M.Zaicev.* On codimension growth of finitely generated associative algebras,Adv.Math.,140(1998),145-155.

[11] [Gia-Zai2] *A.Giambruno and M.Zaicev.* Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimate, Adv.Math.,142(1999), 221-243.

[12] [Gia-Zai3] *A.Giambruno and M.Zaicev.* A characterization of varieties of associative algebras of exponent 2. Serdica Math. J. 26,(2000), 245-252.

[13] [Gia-Zai4] *A.Giambruno and M.Zaicev.* Polynomial Identities and Asymptotic Methods, AMS Mathematical Surveys and Monographs, Vol 122 - Providence R.I., 2005.

[14] [Gordienko] *A.S. Gordienko.* The Regev Conjecture and Cocharacters for Identities of Associative Algebras of PI-exponent 1 and 2, Matematicheskie Zamethi, (2008), Vol. 83, no6, 815-824.

[15] [Halmos] *P.R. Halmos.* Teoria Ingênua dos Conjuntos. Editora Ciência Moderna,2001.

[16] [Jam-Lie] *G. James and M. Lieback.* Representations and Characters of Groups, Editora Cambridge,2001.

[17] [Kaplansky] *I. Kaplansky.* Rings with polynomial identity. Bull. Amer. Math. Soc. 54,(1948), 496-500.

[18] [Kra-Reg] *D. Krakowski and A.Regev.* The polinomial identities of the Grassmann algebra, Trans. Amer. Math. Soc. **181**,(1973), 429-438.

[19] [Kemer] *A.R. Kemer.* Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras. Math. USSR, Izv 25,(1985), 359-374.

[20] [Kemer2] *A.R. Kemer.* T-Ideals with Power Growth of the Codimension are Specht. Siberian Math. J.19,(1978), 37-48.

[21] [Kemer3] *A.R. Kemer.* Ideals of Identities of Associative Algebras,AMS Translations of Math. Monographs. Vol 87,1988.

[22] [Malcev] *Yu. N. Malcev.* A basis for the identities of the algebras of upper triangular matrices.Algebra and Logic.**10**(1971), 393-400.

[23] [Mis-Reg-Zai] *S.P. Mishchenko, A. Regev and M. Zaicev.* A Characterization of PI-algebras with bounded multiplicities of cocharacters. J. Algebra 219,(1999), 356-368.

[24] [Regev] *A.Regev.* Existence of identities in $A \otimes B$. Israel J. Math 11, (1972), 131-152.

[25] [Rosset] *S.Rosset.* A new proof of the Amitsur-Levitzki identity. Israel J. Math. 23, (1976), 187-188.